פתרון תרגיל

משפט דה מואבר

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 56, ת. 67

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

67) z הוא מספר מרוכב. נתון שהמספרים z ו-z^4 נמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים. הערך המוחלט של z הוא r.

א. הבע באמצעות r את z^4. (מצא את שלוש האפשרויות).

ב. נסמן ב-A, B ו-C את שלוש הנקודות שמיוצגות ע"י המספרים שמצאת בסעיף א'.
נתון ששטח המשולש ABC הוא $192\sqrt{3}$. מצא את r.

א. הבע באמצעות r את z^4. (מצא את שלוש האפשרויות).

פתרון

$$z = r\text{cis}\theta = \overset{x}{r\cos\theta} + i\overset{y}{r\sin\theta}$$

$$z^4 = (r\text{cis}\theta)^4 = r^4\text{cis}4\theta$$

$$(r\text{cis}\theta)^n = r^n \text{cis}\, n\theta$$

$$= \underset{x}{r^4\cos4\theta} + i\underset{y}{r^4\sin4\theta}$$

משוואת ישר:

$$y = mx + n$$

משוואת ישר העובר בראשית הצירים:

$$y = mx \rightarrow \frac{y}{x} = m$$

א. הבע באמצעות r את z^4. (מצא את שלוש האפשרויות).

פתרון

$$\frac{r^4\sin 4\theta}{r^4\cos 4\theta} = m = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}$$

$$\frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\tan 4\theta = \tan\theta$$

$$4\theta = \theta + 180°k$$

$$3\theta = 180°k$$

$$\theta = 60°k$$

א. הבע באמצעות r את z^4. (מצא את שלוש האפשרויות).

פתרון

$$\theta = 60°k$$

$$z^4 = r^4\text{cis}4\theta = r^4\text{cis}240°k$$

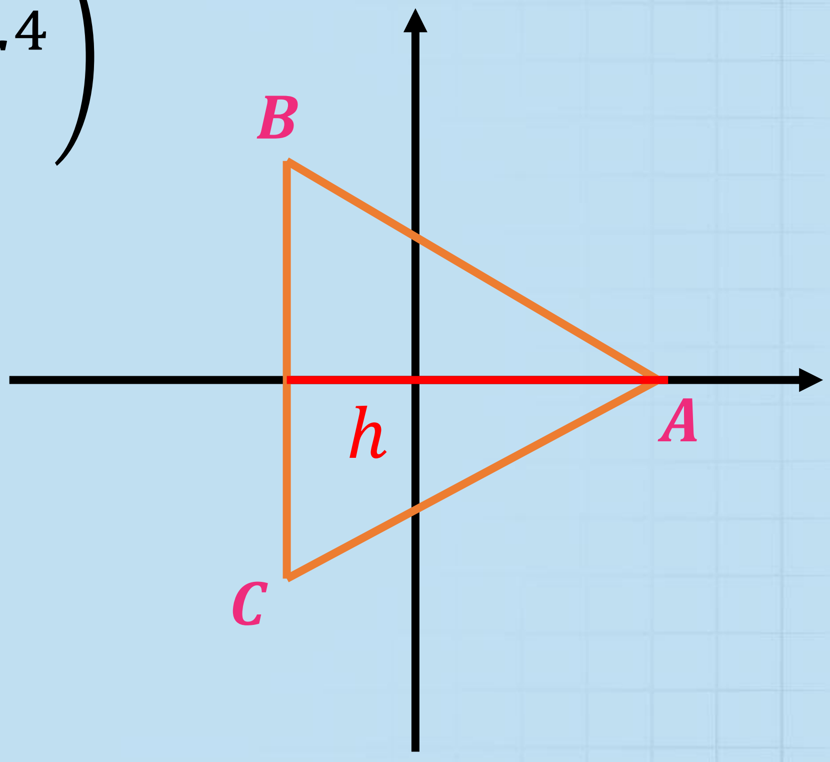
$$\boxed{\begin{aligned} k = 0: &\quad z^4 = r^4\text{cis}0° = r^4 \\ k = 1: &\quad z^4 = r^4\text{cis}240° = -\frac{1}{2}r^4 - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r^4 \\ k = 2: &\quad z^4 = r^4\text{cis}480° = r^4\text{cis}120° = -\frac{1}{2}r^4 + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r^4 \end{aligned}}$$

$$k = 3: \quad z^4 = r^4\text{cis}720° = r^4$$

ב. נסמן ב-A, B ו-C את שלוש הנקודות שמיוצגות ע"י המספרים שמצאת בסעיף א'.
נתון ששטח המשולש ABC הוא $192\sqrt{3}$. מצא את r.

פתרון

$$A(r^4,0)\quad B\left(-\frac{1}{2}r^4,\frac{\sqrt{3}}{2}r^4\right)\quad C\left(-\frac{1}{2}r^4,-\frac{\sqrt{3}}{2}r^4\right)$$



$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot h}{2}$$

$$BC=y_B-y_C=\frac{\sqrt{3}}{2}r^4-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r^4\right)=\sqrt{3}r^4$$

$$h=x_A-x_{B,C}=r^4-\left(-\frac{1}{2}r^4\right)=\frac{3}{2}r^4$$

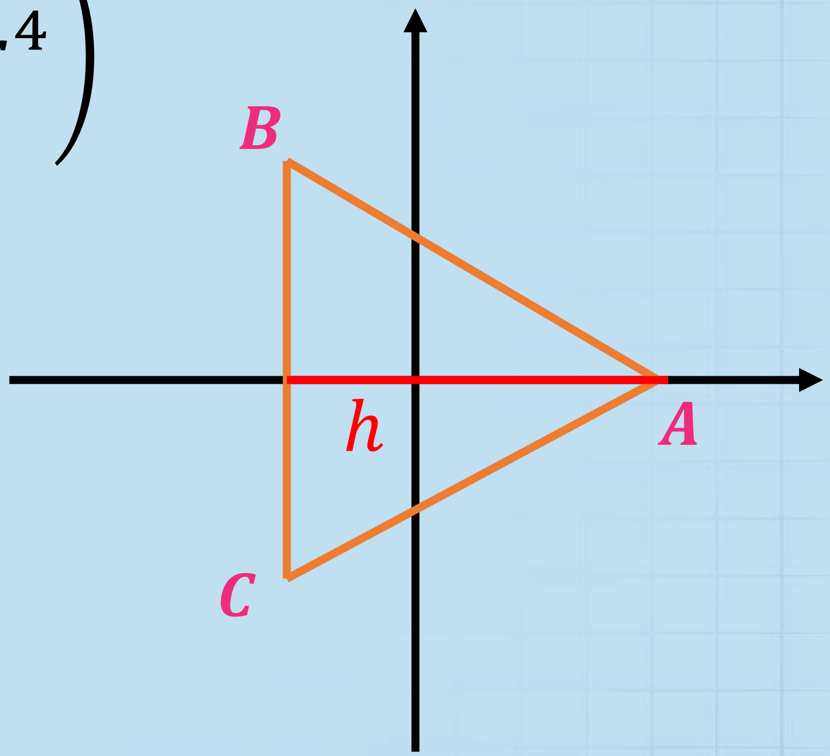
ב. נסמן ב-A, B ו-C את שלוש הנקודות שמיוצגות ע"י המספרים שמצאת בסעיף א'.
נתון ששטח המשולש ABC הוא $192\sqrt{3}$. מצא את r.

פתרון

$$A(r^4,0)\quad B\left(-\frac{1}{2}r^4,\frac{\sqrt{3}}{2}r^4\right)\quad C\left(-\frac{1}{2}r^4,-\frac{\sqrt{3}}{2}r^4\right)$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot h}{2}$$

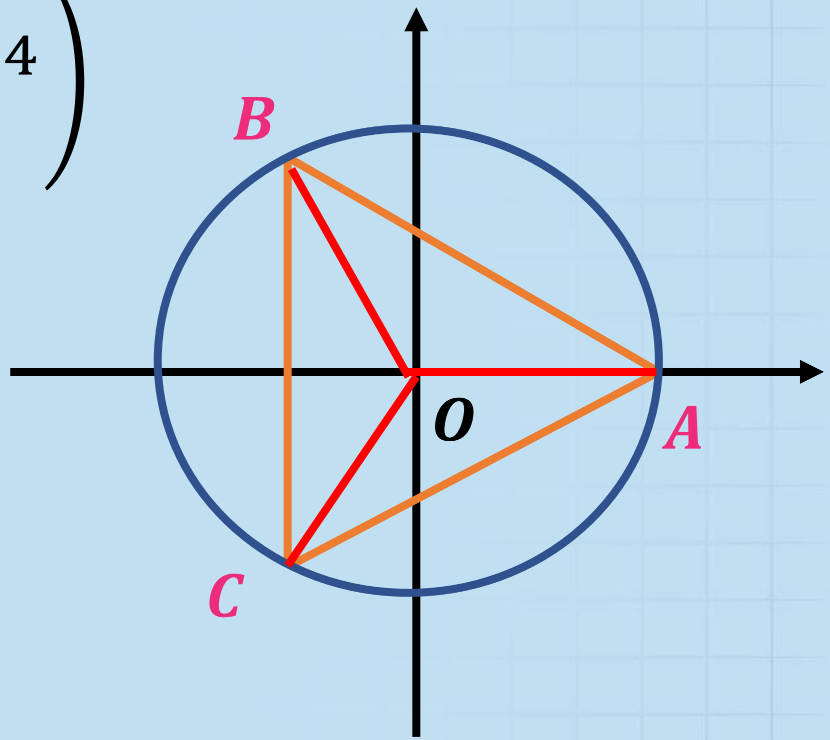
$$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}r^4\cdot\frac{3}{2}r^4}{2}=\frac{3\sqrt{3}r^8}{4}$$



ב. נסמן ב-A, B ו-C את שלוש הנקודות שמיוצגות ע"י המספרים שמצאת בסעיף א'.
נתון ששטח המשולש ABC הוא $192\sqrt{3}$. מצא את r.

פתרון

$$A(r^4,0) \quad B\left(-\frac{1}{2}r^4,\frac{\sqrt{3}}{2}r^4\right) \quad C\left(-\frac{1}{2}r^4,-\frac{\sqrt{3}}{2}r^4\right)$$



$$S_{\Delta ABC}=3\cdot S_{\Delta AOB}$$

$$=3\cdot\frac{AO\cdot OB\cdot\sin\frac{360^\circ}{3}}{2}$$

$$=3\cdot\frac{r^4\cdot r^4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}r^8}{4}=192\sqrt{3}\ \rightarrow r^8=256 \qquad \boxed{r=2}$$

בהצלחה