תרגיל לדוגמה

משפט דה מואבר

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 53, דוגמה ב'

המצגת נערכה ע״י עומרי גלעדי

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים נתון: $a_1 = \sqrt{3} + i$, $a_2 = 4i$. חשב את a_{11}.

בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים נתון: $a_1 = \sqrt{3} + i$, $a_2 = 4i$. חשב את a_{11}.

פתרון

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4i}{\sqrt{3} + i} = \frac{4i}{\sqrt{3} + i} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i}$$

$$= \frac{4i\left(\sqrt{3} - i\right)}{\sqrt{3}^2 - i^2} = \frac{4 + 4\sqrt{3}i}{3 + 1} = 1 + \sqrt{3}i$$

בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים נתון: $a_1 = \sqrt{3} + i$, $a_2 = 4i$. חשב את a_{11}.

פתרון

$$x + y \cdot i \to r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$q = 1 + \sqrt{3}i = 2\text{cis}60°$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \to \theta = 60°$$

$$a_1 = \sqrt{3} + i = 2\text{cis}30°$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \qquad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \to \theta = 30°$$

בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים נתון: $a_1 = \sqrt{3} + i$, $a_2 = 4i$. חשב את a_{11}.

פתרון

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$(r\text{cis}\theta)^n = r^n \text{cis}\, n\theta$

$(r_1 \text{cis}\, \theta_1) \cdot (r_2 \text{cis}\, \theta_2) = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

$a_{11} = 2\text{cis}30° \cdot (2\text{cis}60°)^{11-1}$

$= 2\text{cis}30° \cdot 2^{10}\text{cis}600°$

$= 2048\text{cis}(30° + 600°) = 2048\text{cis}(630°)$

$= 2048 \cdot \left(\cos(630°) + i\sin(630°)\right) = -2048i$

$$\boxed{a_{11} = -2048i}$$

בהצלחה