הקנייה

משפט דה–מואבר

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 51–52, דוגמא א'

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

הקנייה

$$(\sqrt{3}+i)^8 = (\sqrt{3}+i)\cdot(\sqrt{3}+i)\cdot(\sqrt{3}+i)^6 =$$

$$(3+2\sqrt{3}i - 1)\cdot(\sqrt{3}+i)^6 =$$

$$(2+2\sqrt{3}i)\cdot(\sqrt{3}+i)\cdot(\sqrt{3}+i)^5 =$$

$$(2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}i\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+i)^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots..$$

יש דרך קצרה יותר !!!

הקנייה

נעבוד עם הצגה קוטבית:

$$(r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)) \cdot (r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)) =$$
$$r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^2 = (r(\cos\theta + i\sin\theta)) \cdot (r(\cos\theta + i\sin\theta)) =$$

$$r^2(\cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta)) = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

הקנייה

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^3 = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^2 \cdot (r(\cos\theta + i\sin\theta)) =$$

$$(r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)) \cdot (r(\cos\theta + i\sin\theta)) =$$

$$r^3(\cos(2\theta + \theta) + i\sin(2\theta + \theta)) = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^4 = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^2 \cdot (r(\cos\theta + i\sin\theta))^2 =$$

$$(r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)) \cdot (r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)) =$$

$$r^4(\cos(2\theta + 2\theta) + i\sin(2\theta + 2\theta)) = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

הקנייה

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

$$\vdots$$

משפט דה מואבר : $(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n \operatorname{cis} n\theta$

תרגיל לדוגמה

דוגמא א':

נתון: $z=\sqrt{3}+i$. חשב את z^8.

$$x+y\cdot i\rightarrow r(\cos\theta+i\sin\theta)\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2\qquad \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow\theta=30^\circ$$

$$z^8=(\sqrt{3}+i)^8=(2\text{cis}30)^8=2^8\text{cis}(8\cdot 30)=256\text{cis}240=$$

$$256(\cos 240+i\sin 240)=256\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-128-128\sqrt{3}i$$

$$\boxed{\boldsymbol{z^8=-128-128\sqrt{3}i}}$$

בהצלחה