פתרון תרגיל

בעיות גיאומטריות – המישור של גאוס

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 50, ת. 64

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

64) z_1, z_2 ו-z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. z_1 ו-z_2 נמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים. z_3 נמצא על ישר שעובר דרך ראשית הצירים ומאונך לישר שעליו נמצאים z_1 ו-z_2. z_1 ו-z_2 נמצאים ברביע הראשון. z_3 נמצא ברביע השני.

נסמן: $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. נתון: $|z_2| = r_2$, $|z_3| = r_3$.

א. הבע את z_2 באמצעות r_2 ו-α ואת z_3 באמצעות r_3 ו-α.

ב. הבע באמצעות r_1, r_2 ו-r_3 את המנה $\frac{z_1 - iz_3}{z_2 - iz_3}$.

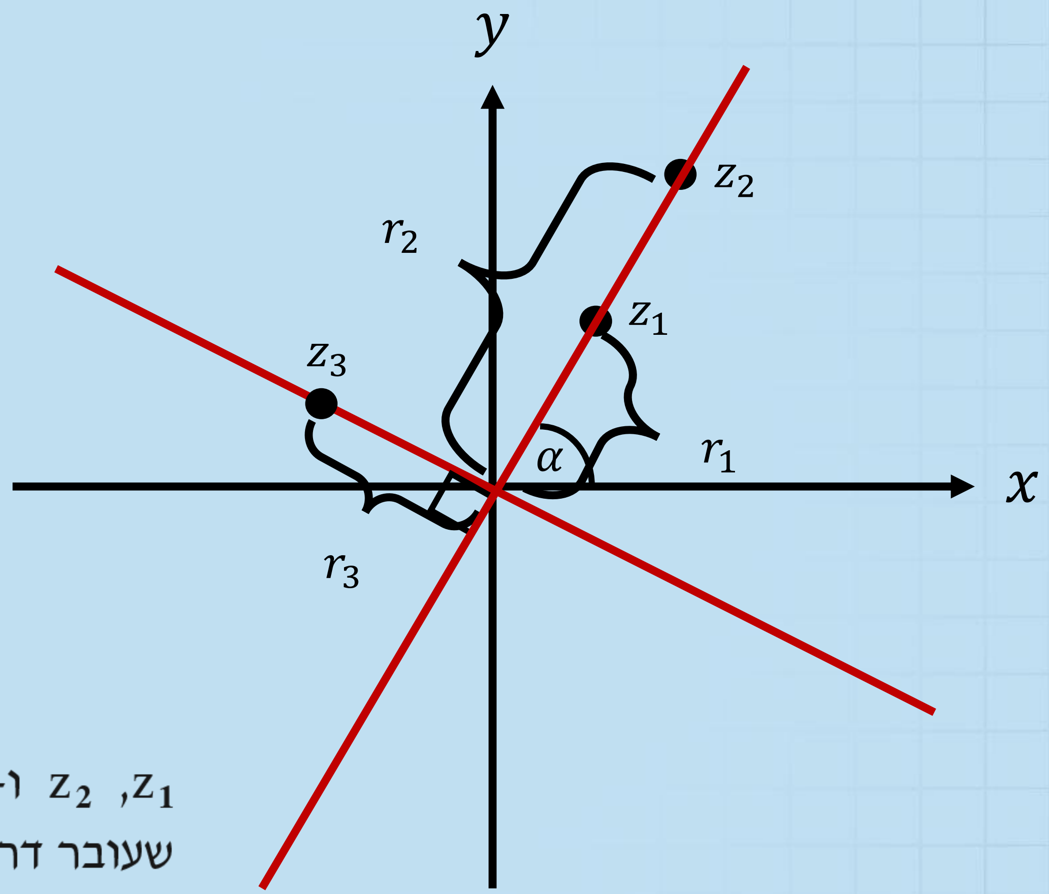
ג. נתון גם: z_1 ו-z_3 נמצאים על מעגל היחידה, $\frac{1}{2} = \left|\frac{z_1 - iz_3}{z_2 - iz_3}\right|$. חשב את r_2.

ד. z_4 הוא הצמוד של z_1. הבע באמצעות α את שטח המרובע שנוצר ע"י הנקודות z_2, z_3, z_4 וראשית הצירים אם נתון ש-$\alpha \neq 45^\circ$.

ה. מדוע קיימת בסעיף ד' ההגבלה $\alpha \neq 45^\circ$? נמק.

א. הבע את z_2 באמצעות r_2 ו-α ואת z_3 באמצעות r_3 ו-α.

פתרון



z_1, z_2 ו-z_3 הם שלושה מספרים מרוכבים שונים. z_1 ו-z_2 נמצאים על ישר אחד שעובר דרך ראשית הצירים. z_3 נמצא על ישר שעובר דרך ראשית הצירים ומאונך לישר שעליו נמצאים z_1 ו-z_2. z_1 ו-z_2 נמצאים ברביע הראשון. z_3 נמצא ברביע השני.

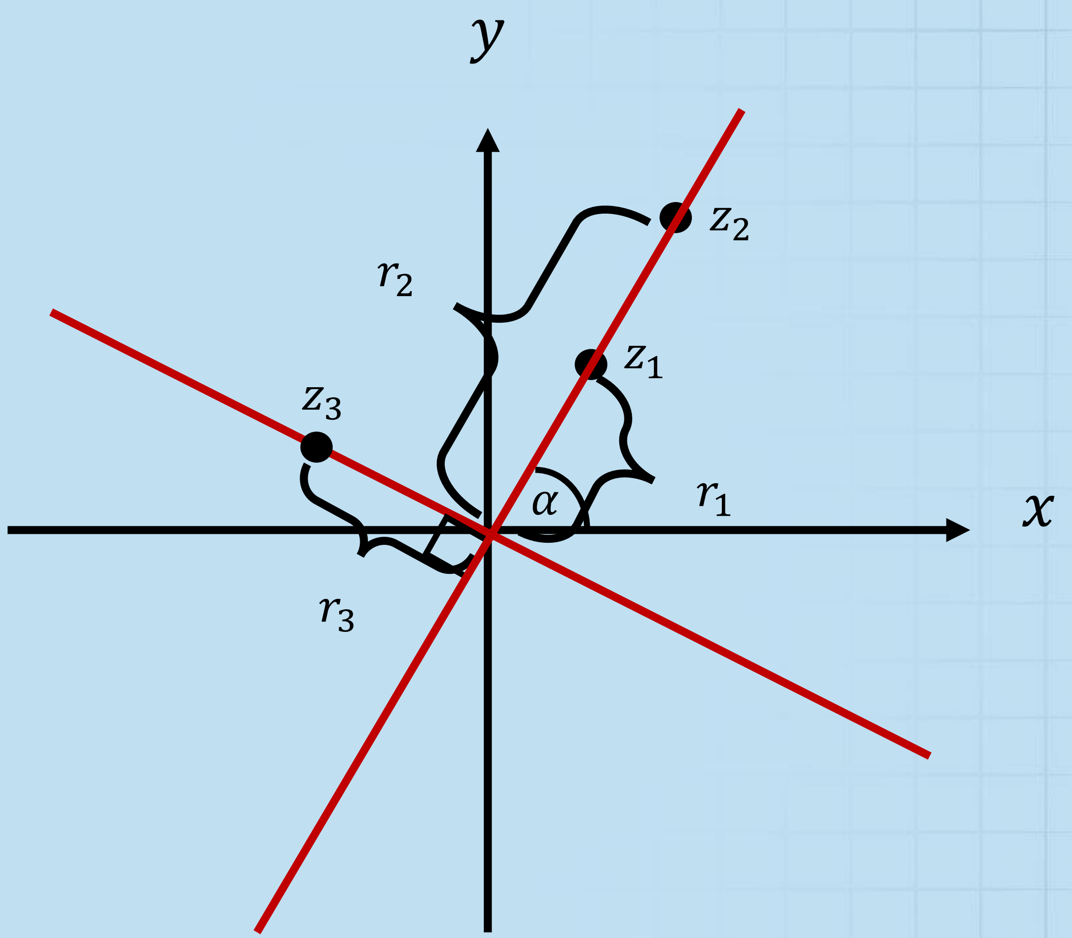
נסמן: $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. נתון: $|z_2| = r_2$, $|z_3| = r_3$.

א. הבע את z_2 באמצעות r_2 ו-α ואת z_3 באמצעות r_3 ו-α.

פתרון

$$z_2 = r_2\text{cis}\alpha = r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$z_3 = r_3\text{cis}(\alpha + 90°)$$



א. הבע את z_2 באמצעות r_2 ו-α ואת z_3 באמצעות r_3 ו-α.

פתרון

$$z_2 = r_2\text{cis}\alpha = r_2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$z_3 = r_3\text{cis}(\alpha + 90°) = r_3\big(\cos(\alpha + 90°) + i\sin(\alpha + 90°)\big)$$

$$= r_3\Big(-\cos\big(180° - (\alpha + 90°)\big) + i\sin\big(180° - (\alpha + 90°)\big)\Big)$$

$$= r_3\big(-\cos(90° - \alpha) + i\sin(90° - \alpha)\big)$$

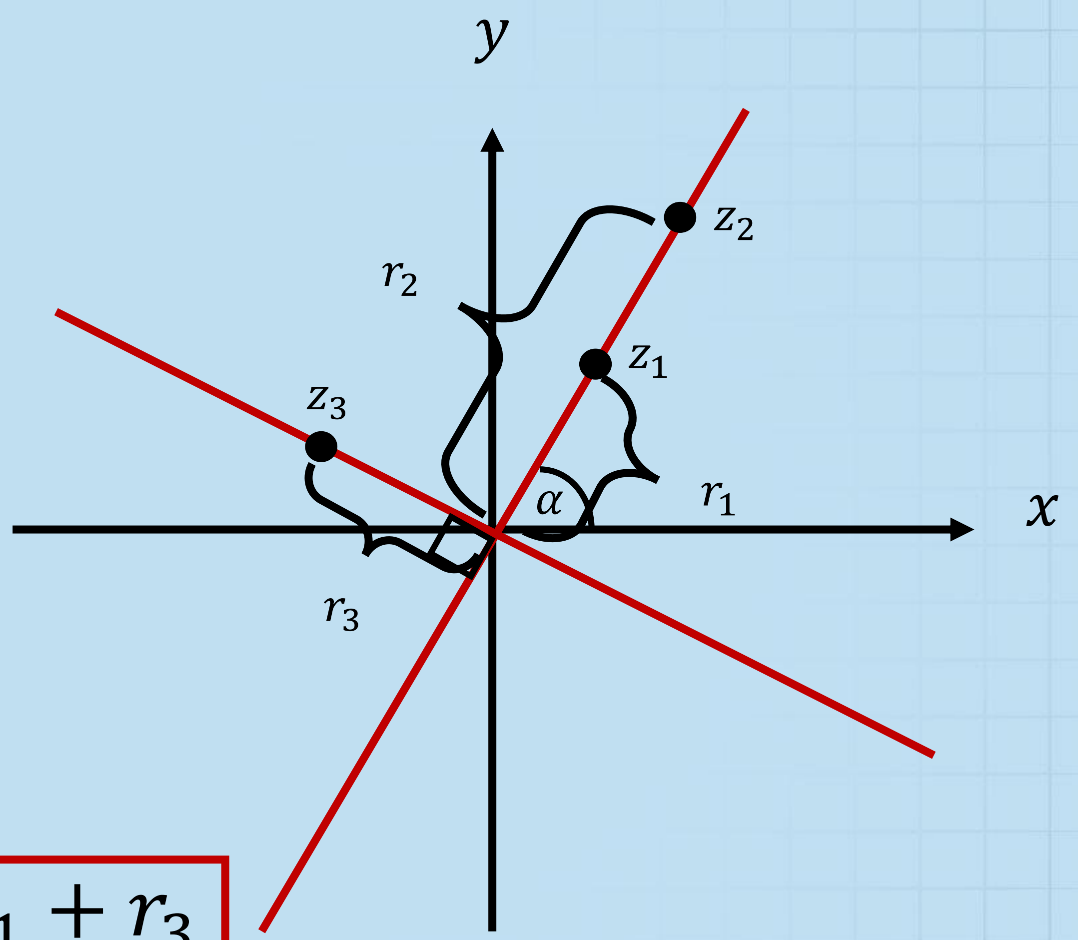
$$= r_3(-\sin\alpha + i\cos\alpha)$$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

ב. הבע באמצעות r_1, r_2 ו-r_3 את המנה $\frac{z_1-iz_3}{z_2-iz_3}$.

פתרון

תזכורת: כפל מספר מרוכב ב- i- שקול לסיבובו ב- $90°$ עם כיוון השעון



$$\frac{z_1 - iz_3}{z_2 - iz_3}$$

$$= \frac{r_1 \operatorname{cis}\alpha + r_3 \operatorname{cis}(\alpha + 90° - 90°)}{r_2 \operatorname{cis}\alpha + r_3 \operatorname{cis}(\alpha + 90° - 90°)}$$

$$= \frac{r_1 \operatorname{cis}\alpha + r_3 \operatorname{cis}\alpha}{r_2 \operatorname{cis}\alpha + r_3 \operatorname{cis}\alpha} = \frac{\cancel{\operatorname{cis}\alpha}(r_1 + r_3)}{\cancel{\operatorname{cis}\alpha}(r_2 + r_3)} = \boxed{\frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}}$$

ג. נתון גם: z_1 ו-z_3 נמצאים על מעגל היחידה, $\left|\frac{z_1-iz_3}{z_2-iz_3}\right|=\frac{1}{2}$. חשב את r_2.

פתרון

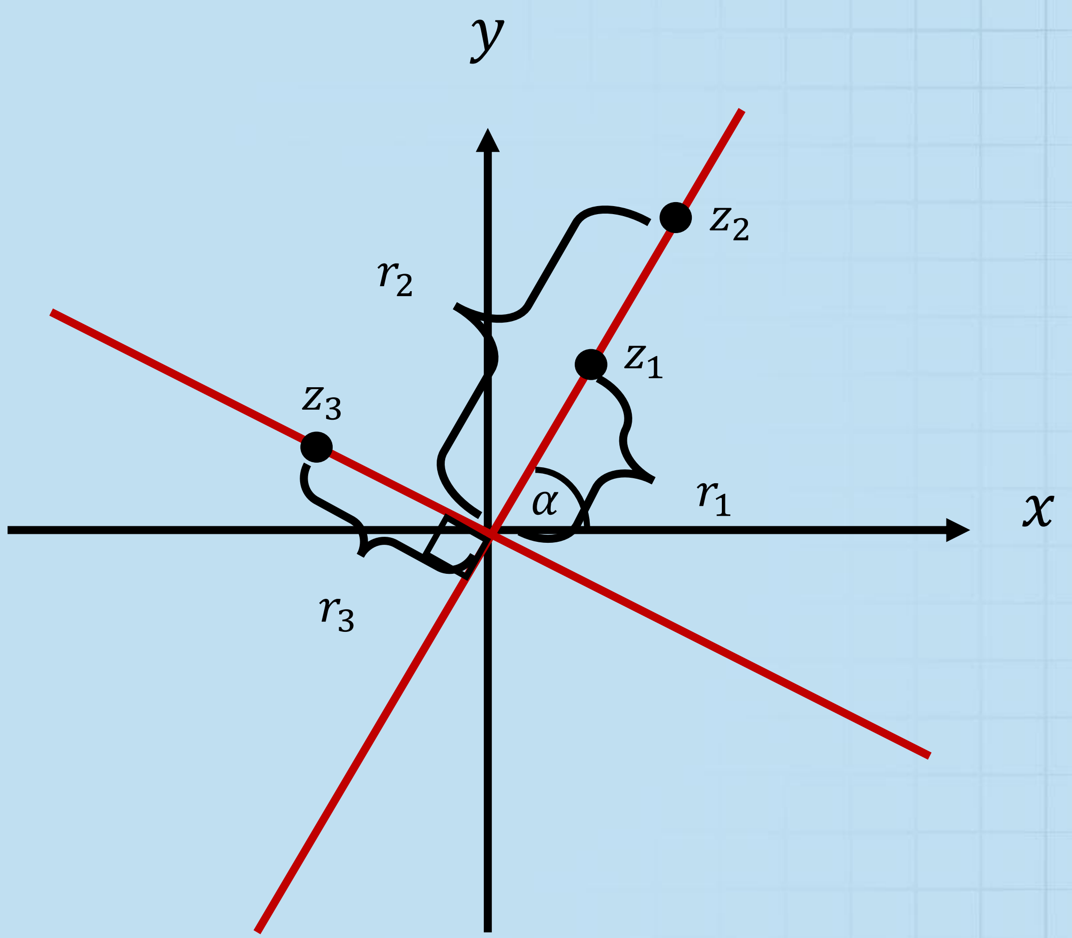
$$r_1=r_3=1$$

$$\left|\frac{z_1-iz_3}{z_2-iz_3}\right|=\left|\frac{r_1+r_3}{r_2+r_3}\right|=\frac{r_1+r_3}{r_2+r_3}$$

$$=\frac{2}{r_2+1}=\frac{1}{2}$$

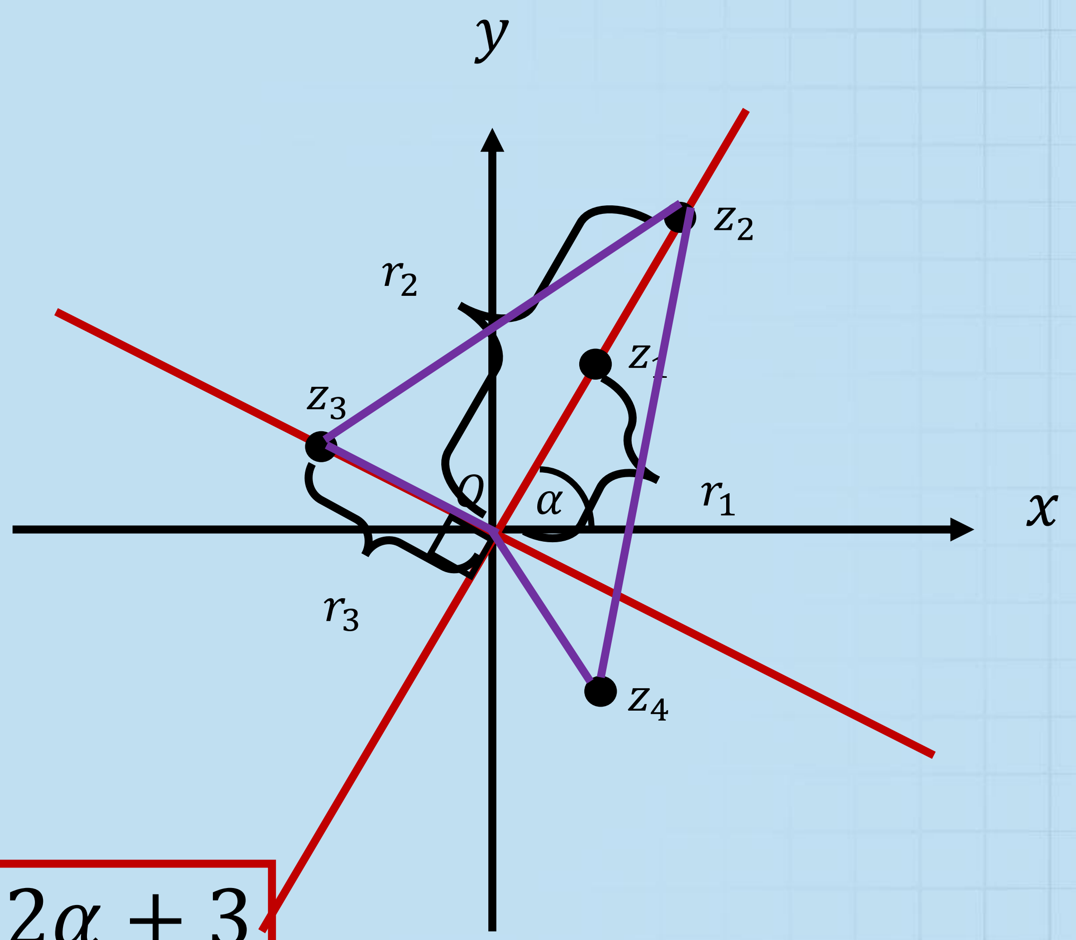
$$r_2+1=4$$

$$\boxed{r_2=3}$$



ד. z_4 הוא הצמוד של z_1. הבע באמצעות α את שטח המרובע שנוצר ע״י הנקודות z_2, z_3, z_4 וראשית הצירים אם נתון ש-$\alpha \neq 45^{\circ}$.

פתרון



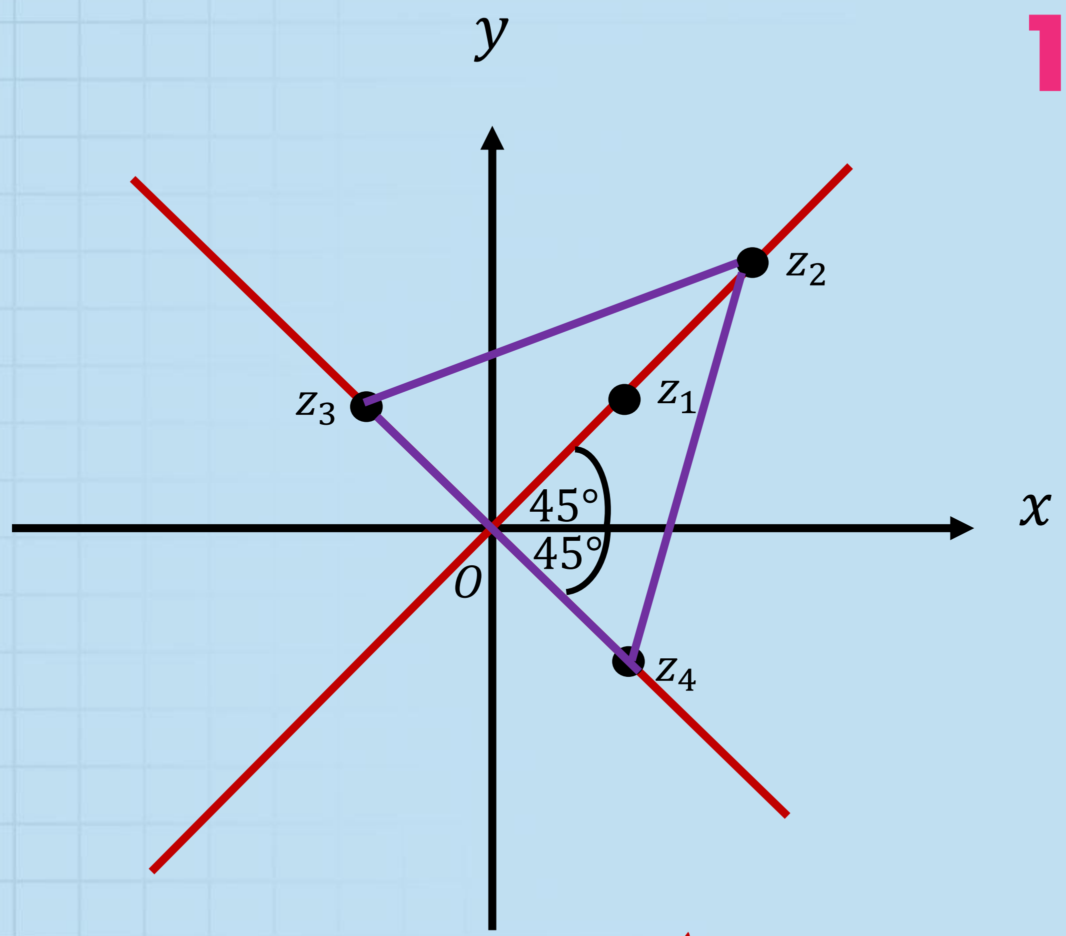
$$S_{z_2z_3Oz_4} = S_{\Delta z_2Oz_4} + S_{\Delta z_2Oz_3}$$

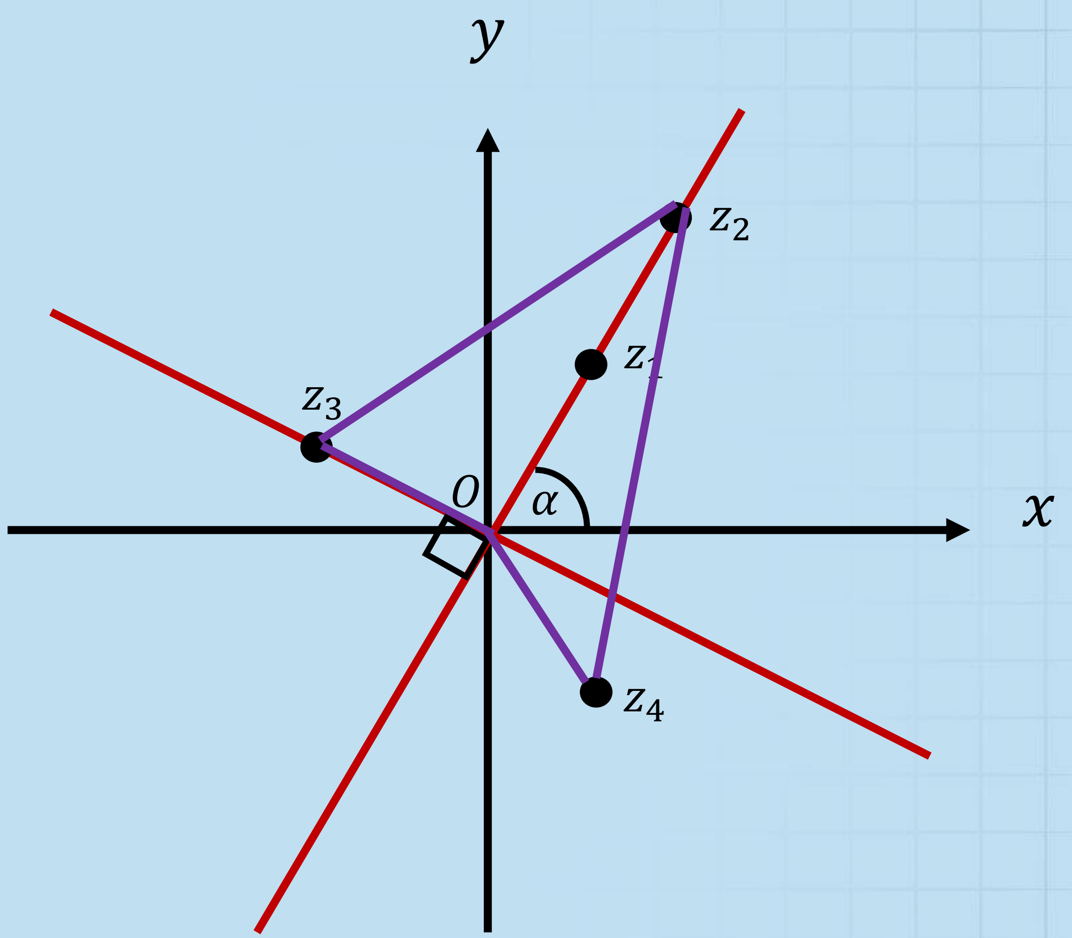
$$= \frac{Oz_2 \cdot Oz_4 \cdot \sin \measuredangle z_2Oz_4}{2} + \frac{Oz_2 \cdot Oz_3 \cdot \sin \measuredangle z_2Oz_3}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 1 \cdot \sin 2\alpha}{2} + \frac{3 \cdot 1 \cdot \sin 90^{\circ}}{2} = \boxed{\frac{3\sin 2\alpha + 3}{2}}$$

ה. מדוע קיימת בסעיף ד' ההגבלה $\alpha \neq 45^{\circ}$? נמק.

פתרון





אם $\alpha = 45^{\circ}$ אז הקודקודים z_3, z_4, O ינוחו על אותו הישר והצורה תהיה משולש ולא מרובע

בהצלחה