פתרון תרגיל

בעיות גיאומטריות
במישור של גאוס

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 44, ת. 6

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

6) z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים.

נתון: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

א. מצא את ארבעת הקודקודים האחרים של המחומש.

ב. z_2, z_3, z_4 ו-z_5 הם ארבעת הקודקודים שמצאת בסעיף א'.

הוכח: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = -\bar{z}_1$.

z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. נתון: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

א. מצא את ארבעת הקודקודים האחרים של המחומש.

פתרון

נמצא את ההצגה הקוטבית של z

$$z_1 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{x} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{y}i$$

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\theta = \frac{y}{x}}$$

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

רביע ראשון $\theta = 30° + 180°k$

$$\theta = 30°$$

z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. נתון: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
א. מצא את ארבעת הקודקודים האחרים של המחומש.

פתרון

על פי התוצאה שקיבלנו מדובר במחומש שחסום במעגל שרדיוסו $r = 1$

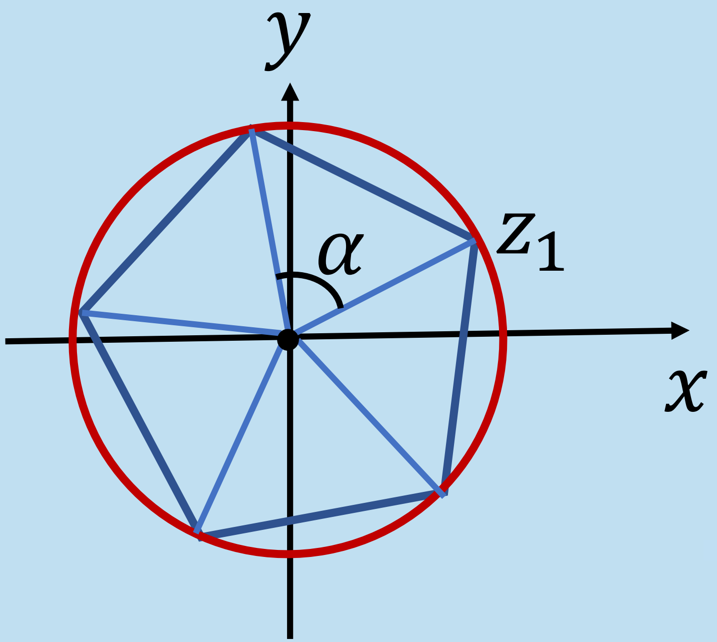
$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$r = 1$$

$$\theta = 30°$$

$$\boxed{z_1 = cis(30°)}$$

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$



z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. נתון: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
א. מצא את ארבעת הקודקודים האחרים של המחומש.

פתרון

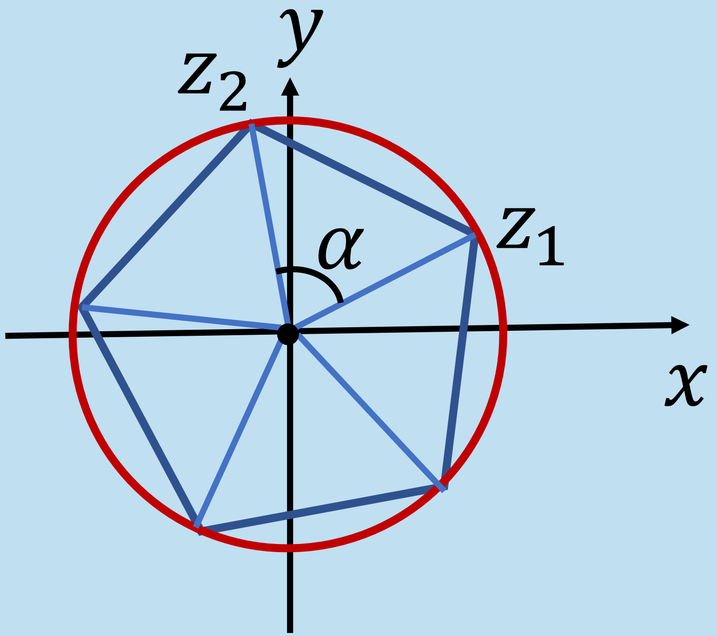
הקדקוד השני של המחומש
מתאים לזווית בת $30° + 72°$

$$z_1 = cis(30°)$$

$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$z_2 = cis(30° + 72°)$$

$$\boxed{z_2 = cis(102°)}$$



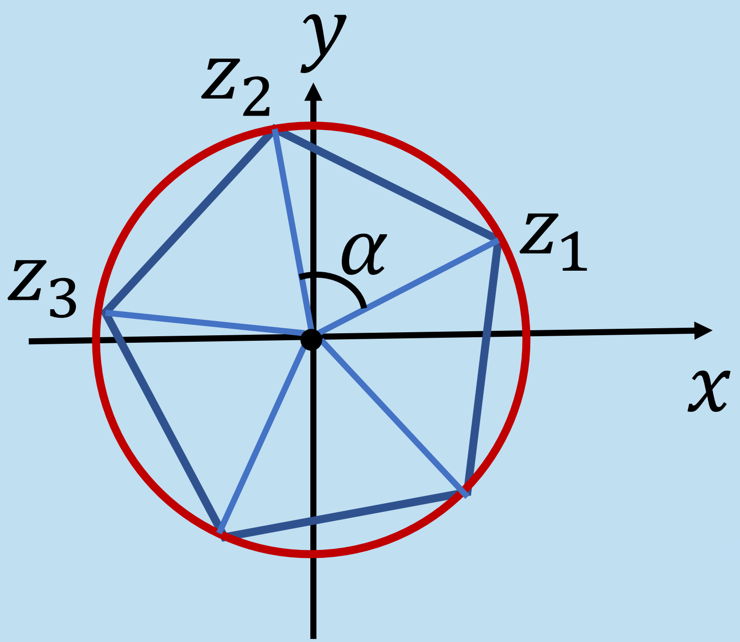
z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. נתון: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
א. מצא את ארבעת הקודקודים האחרים של המחומש.

פתרון

הקדקוד השלישי של המחומש
מתאים לזווית בת $102° + 72°$

$$z_2 = cis(102°)$$

$$\alpha = 72°$$



$$z_3 = cis(102° + 72°)$$

$$\boxed{z_3 = cis(174°)}$$

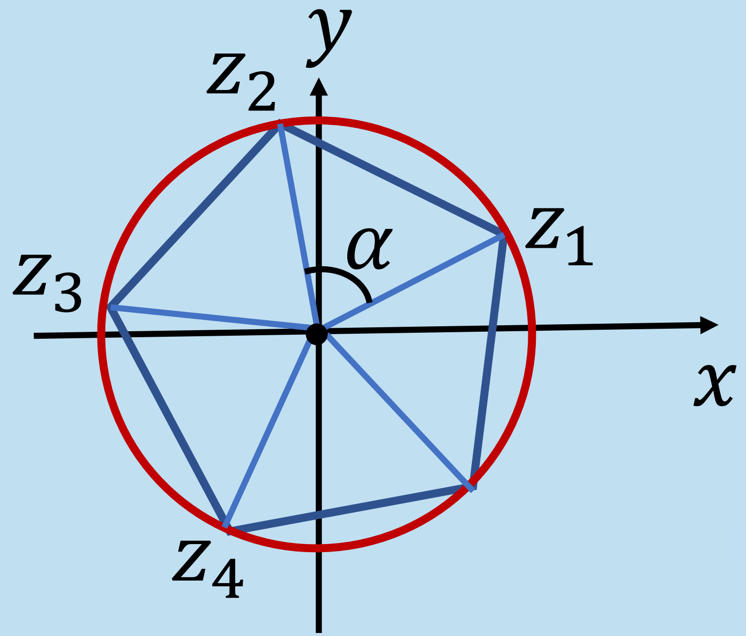
z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. נתון: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.
א. מצא את ארבעת הקודקודים האחרים של המחומש.

פתרון

הקדקוד הרביעי של המחומש
מתאים לזווית בת $174° + 72°$

$$z_3 = cis(174°)$$

$$\alpha = 72°$$



$$z_4 = cis(174° + 72°)$$

$$\boxed{z_4 = cis(246°)}$$

z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. נתון: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

א. מצא את ארבעת הקודקודים האחרים של המחומש.

פתרון

הקדקוד החמישי של המחומש

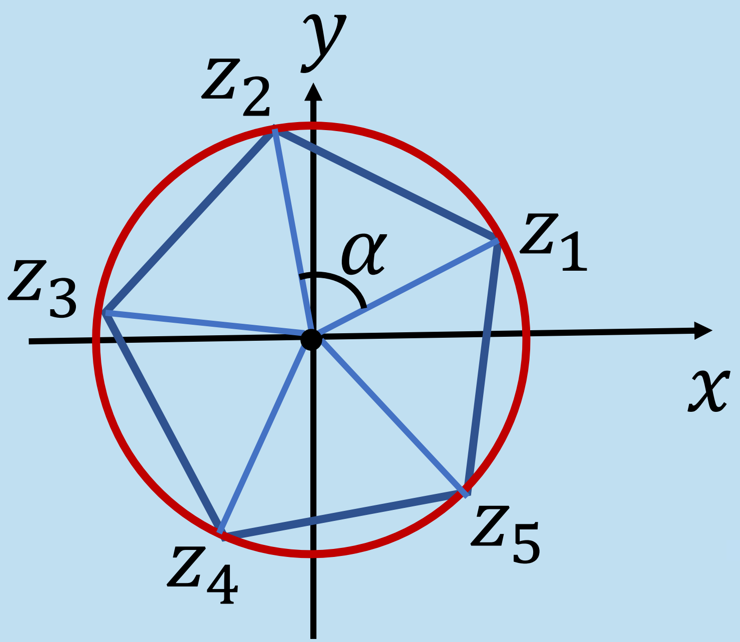
מתאים לזווית בת $246° + 72°$

$$z_4 = cis(246°)$$

$$\alpha = 72°$$

$$z_5 = cis(246° + 72°)$$

$$\boxed{z_5 = cis(318°)}$$



z_1 הוא קודקוד של מחומש משוכלל החסום במעגל שמרכזו בראשית הצירים. נתון: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

א. מצא את ארבעת הקודקודים האחרים של המחומש.

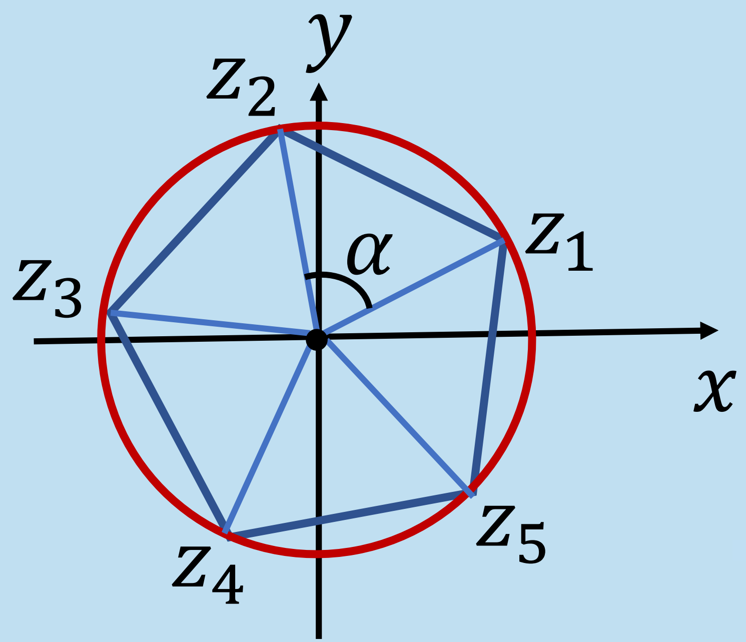
פתרון

$$z_5 = cis(318°)$$

$$\alpha = 72°$$

$$z_1 = cis(318° + 72°)$$

$$z_1 = cis(390°) = cis(30°)$$



ב. z_2, z_3, z_4 ו-z_5 הם ארבעת הקודקודים שמצאת בסעיף א'.

הוכח: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = -\bar{z}_1$.

פתרון

$$z_1 = cis(30°)$$

$$z_2 = cis(102°)$$

$$z_3 = cis(174°)$$

$$z_4 = cis(246°)$$

$$z_5 = cis(318°)$$

$$\boxed{r_1 cis\,\theta_1 \cdot r_2 cis\,\theta_2 = r_1 \cdot r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = cis(30° + 102° + 174° + 246° + 318°)$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = cis(870°)$$

ב. z_2, z_3, z_4 ו-z_5 הם ארבעת הקודקודים שמצאת בסעיף א'.

הוכח: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = -\bar{z}_1$.

פתרון

$$0° < \theta < 360°$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = cis(870°)$$

$$870° = 2 \cdot 360° + 150°$$

$$cis(870°) = cis(150°)$$

$$cis(870°) = \underbrace{cos870°}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \underbrace{isin870°}_{\frac{1}{2}}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

ב. z_2, z_3, z_4 ו-z_5 הם ארבעת הקודקודים שמצאת בסעיף א'.

הוכח: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = -\bar{z}_1$.

פתרון

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\bar{z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{-\bar{z_1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

בהצלחה