פתרון תרגיל

פעולות החשבון – המישור של גאוס

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 41, ת. 56

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

56) z הוא מספר מרוכב המקיים את המשוואה: $z^2-(2\sin\theta)z+1=0$. θ פרמטר ממשי.

א. הבע באמצעות θ את שני הפתרונות z_1 ו-z_2 של המשוואה.

ב. נתון: $|z_2-z_1|=1$, $0^\circ<\theta<180^\circ$. מצא את θ.

z הוא מספר מרוכב המקיים את המשוואה: $z^2-(2\sin\theta)z+1=0$. θ פרמטר ממשי.

א. הבע באמצעות θ את שני הפתרונות z_1 ו-z_2 של המשוואה.

פתרון

סעיף א':

$$\boxed{z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$z^2-(2\sin\theta)z+1=0$$

$$z_{1,2}=\frac{2\sin\theta\pm\sqrt{(-(2\sin\theta))^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\sin\theta\pm\sqrt{4sin^2\theta-4}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\sin\theta\pm2\sqrt{sin^2\theta-1}}{2}$$

z הוא מספר מרוכב המקיים את המשוואה: $z^2-(2\sin\theta)z+1=0$. θ פרמטר ממשי.

א. הבע באמצעות θ את שני הפתרונות z_1 ו-z_2 של המשוואה.

פתרון

סעיף א':

$$\boxed{1-sin^2\theta=cos^2\theta}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\sin\theta\pm2\sqrt{sin^2\theta-1}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\sin\theta\pm2\sqrt{(-1)(1-sin^2\theta)}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\sin\theta\pm2\sqrt{(-1)cos^2\theta}}{2}$$

z הוא מספר מרוכב המקיים את המשוואה: $z^2-(2\sin\theta)z+1=0$. θ פרמטר ממשי.

א. הבע באמצעות θ את שני הפתרונות z_1 ו-z_2 של המשוואה.

פתרון

סעיף א':

$$z_{1,2}=\frac{2\sin\theta\pm2\sqrt{(-1)cos^2\theta}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{2\sin\theta\pm2icos\ \theta}{2}$$

$$z_1=\sin\theta+icos\ \theta$$

$$z_2=\sin\theta-icos\ \theta$$

$$z_2=\bar{z_1}$$

אם במשוואה ריבועית בעלת מקדמים ממשיים קיים פתרון אחד מרוכב, אז גם הפתרון השני יהיה מספר מרוכב והוא יהיה 'צמוד' לפתרון הראשון

z הוא מספר מרוכב המקיים את המשוואה: $z^2-(2\sin\theta)z+1=0$. θ פרמטר ממשי.

ב. נתון: $|z_2-z_1|=1$, $0^\circ<\theta<180^\circ$. מצא את θ.

סעיף ב':

פתרון

$$|z_2-z_1|=1$$

$$|z_2-z_1|=|\sin\theta-i\cos\theta-(\sin\theta+i\cos\theta)|$$

$$|z_2-z_1|=|-i2\cos\theta|=|2\cos\theta|=1$$

$$2\cos\theta=1 \qquad -2\cos\theta=1$$

z הוא מספר מרוכב המקיים את המשוואה: $z^2-(2\sin\theta)z+1=0$. θ פרמטר ממשי.

ב. נתון: $|z_2-z_1|=1$, $\boxed{0^\circ<\theta<180^\circ}$. מצא את θ.

סעיף ב':

פתרון

$$2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \pm 60^\circ + 360^\circ k$$

$$\boxed{\theta_1 = 60^\circ}$$

$$-2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \pm 120^\circ + 360^\circ k$$

$$\boxed{\theta_2 = 120^\circ}$$

בהצלחה