פתרון תרגיל

תרגילים שונים – פעולות החשבון – המישור של גאוס

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 41, ת. 54

המצגת נערכה ע"י עומרי גלעדי

השאלה

54) נתון: $z = \cos\theta + i\sin\theta$ $\quad (0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \frac{3}{2}\pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2})$.

א. הוכח: $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} = i\,tg\,\theta$.

ב. נתון: $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} = \sqrt{3}\,i$. מצא את z אם נתון שהוא נמצא ברביע השלישי.

כתוב את התשובה בצורה הקוטבית ובצורה האלגברית.

נתון: $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<2\pi$, $\theta\neq\frac{3}{2}\pi$, $\theta\neq\frac{\pi}{2})$. א. הוכח: $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=i\,tg\theta$.

פתרון

<u>סעיף א</u>:

נתון: $z=cis\,\theta$

נסמן בהצגה קרטזית: $z=x+yi$

$$\Downarrow$$

$$\bar{z}=x-yi$$

$$z-\bar{z}=\cancel{x}+yi-(\cancel{x}-yi)=2yi$$

נתון: $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $\quad (0<\theta<2\pi \quad ,\theta\neq\frac{3}{2}\pi \quad ,\theta\neq\frac{\pi}{2})$. א. הוכח: $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=i\,tg\theta$.

פתרון

סעיף א:

נתון:

$$z=rcis\,\theta$$

נסמן בהצגה קרטזית:

$$z=x+yi$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{z}=x-yi$$

$$z+\bar{z}=\ x+\cancel{yi}+x-\cancel{yi}=2x$$

נתון: $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $\left(0<\theta<2\pi\right.$, $\theta\neq\frac{3}{2}\pi$, $\left.\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$.

א. הוכח: $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=i\,tg\,\theta$.

פתרון

סעיף א:

$$z = r\,cis\,\theta$$

$$z-\bar{z}=2yi$$

$$z+\bar{z}=2x$$

$$\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=\frac{\cancel{2}yi}{\cancel{2}x}=\frac{y}{x}i$$

$$\boxed{tg\,\theta=\frac{y}{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=itg\,\theta}$$

נתון: $z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 < \theta < 2\pi$, $\theta \neq \frac{3}{2}\pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2})$.

ב. נתון: $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} = \sqrt{3}i$. מצא את z אם נתון שהוא נמצא ברביע השלישי.

כתוב את התשובה בצורה הקוטבית ובצורה האלגברית.

פתרון

סעיף ב:

$$z = cis\ \theta$$

$$r = 1$$

$$z = x + yi$$

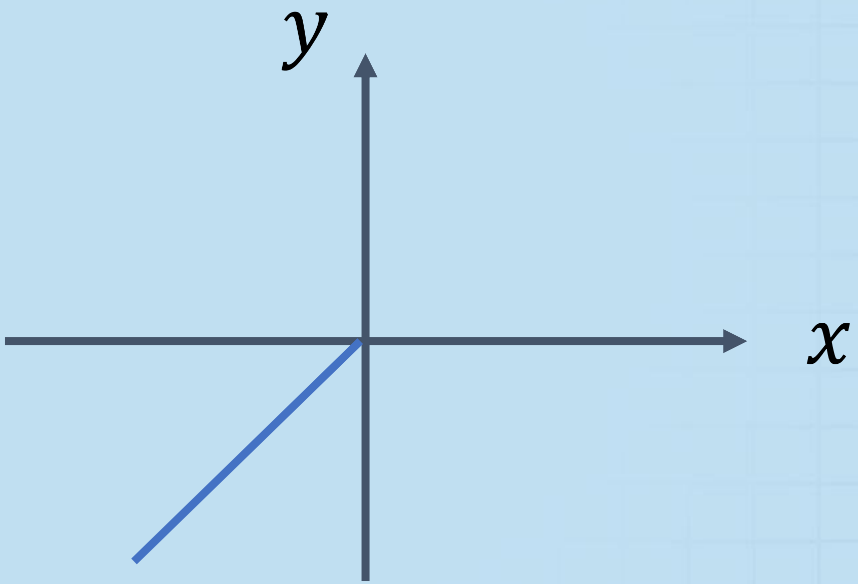
$$\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} = itg\ \theta = \sqrt{3}i$$

$$\Downarrow$$

$$tg\ \theta = \sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = 60° + 180°k$$



$$180° < \theta < 270°$$

נתון: $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<2\pi$,$\theta\neq\frac{3}{2}\pi$,$\theta\neq\frac{\pi}{2})$.

ב. נתון: $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=\sqrt{3}i$. מצא את z אם נתון שהוא נמצא ברביע השלישי.

כתוב את התשובה בצורה הקוטבית ובצורה האלגברית.

פתרון

סעיף ב:

$$z = cis\ \theta$$

$$r = 1$$

$$z = x + yi$$

$$\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} = i tg\ \theta = \sqrt{3}i$$

$$\Downarrow$$

$$tg\ \theta = \sqrt{3}$$

$$180° < \theta < 270°$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = 60° + 180°k \quad \Rightarrow \quad \theta = 240°$$

נתון: $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $\quad 0<\theta<2\pi$, $\theta\neq\frac{3}{2}\pi$, $\theta\neq\frac{\pi}{2}$).

ב. נתון: $\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=\sqrt{3}i$. מצא את z אם נתון שהוא נמצא ברביע השלישי.

כתוב את התשובה בצורה הקוטבית ובצורה האלגברית.

פתרון

סעיף ב:

$$z = cis\ \theta$$

$$z = x + yi$$

$$\theta = 240°$$

$$\boxed{z = cis\ (240°)}$$

נעבור להצגה אלגברית:

$$\boxed{z = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$z = \underbrace{\cos 240°}_{-0.5} + \underbrace{i\sin 240°}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

בהצלחה