פתרון תרגיל

חקירת פונקציה–
פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 297, ת. 27

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

27) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x(\ln x)^n$ (n מספר טבעי) בנקודה $x = e$ הוא 3.

א. מצא את n ורשום את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הפגישה של הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $\mathbf{g'(x) = f(x)}$ בתחום $x > 0$.

(1) מהו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$? נמק.

(2) האם יש לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון בנקודה שבה $x = 1$? נמק.

א. מצא את n ורשום את הפונקציה.

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = x \cdot (lnx)^n$$

נתון: $f'(e) = 3$

$$f'(x) = 1 \cdot (lnx)^n + x \cdot n \cdot (lnx)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$1 \cdot (lne)^n + e \cdot n \cdot (lne)^{n-1} \cdot \frac{1}{e} = 3$$

א. מצא את n ורשום את הפונקציה.

פתרון

סעיף א':

$$1 \cdot (lne)^n + e \cdot n \cdot (lne)^{n-1} \cdot \frac{1}{e} = 3$$

$$1 + en \cdot \frac{1}{e} = 3$$

$$1 + n = 3$$

$$\boldsymbol{n = 2}$$

$$f(x) = x \cdot (lnx)^n \longrightarrow \boldsymbol{f(x) = x \cdot (lnx)^2}$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

סעיף ב':

פתרון

$$f'(x) = 1 \cdot (lnx)^2 + x \cdot 2 \cdot lnx \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = ln^2x + 2lnx$$

$$ln^2x + 2lnx = 0$$

$$lnx(lnx + 2) = 0$$

$$lnx = 0$$

$$x = 1$$

$$lnx + 2 = 0$$

$$lnx = -2$$

$$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

סעיף ב':

פתרון

$$f'(x) = ln^2x + 2lnx$$

$$f''(x) = 2lnx \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2lnx + 2}{x}$$

$$f''(1) = \frac{2ln1 + 2}{1} = 2 > 0 \longrightarrow$$ מינימום

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

סעיף ב':

פתרון

$$f''(x) = \frac{2lnx + 2}{x}$$

$$f''(e^{-2}) = \frac{2lne^{-2} + 2}{e^{-2}} = \frac{-2}{e^{-2}} < 0 \longrightarrow$$ מקסימום

$$f(x) = x \cdot (lnx)^2$$

$$f(1) = 1 \cdot (ln1)^2 = 0$$

$$f(e^{-2}) = e^{-2} \cdot (lne^{-2})^2 = \frac{4}{e^2}$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

סעיף ב':

פתרון

לסיכום:

$(1,0)$ מינימום

$\left(\frac{1}{e^2},\frac{4}{e^2}\right)$ מקסימום

ג. מצא את נקודת הפגישה של הפונקציה עם ציר ה-x.

פתרון

סעיף ג':

$$f(x) = x \cdot (lnx)^2$$

$$x \cdot (lnx)^2 = 0$$

$$\cancel{x = 0}$$

נפסל בגלל תחום ההגדרה של הפונקציה

$$(lnx)^2 = 0$$

$$lnx = 0$$

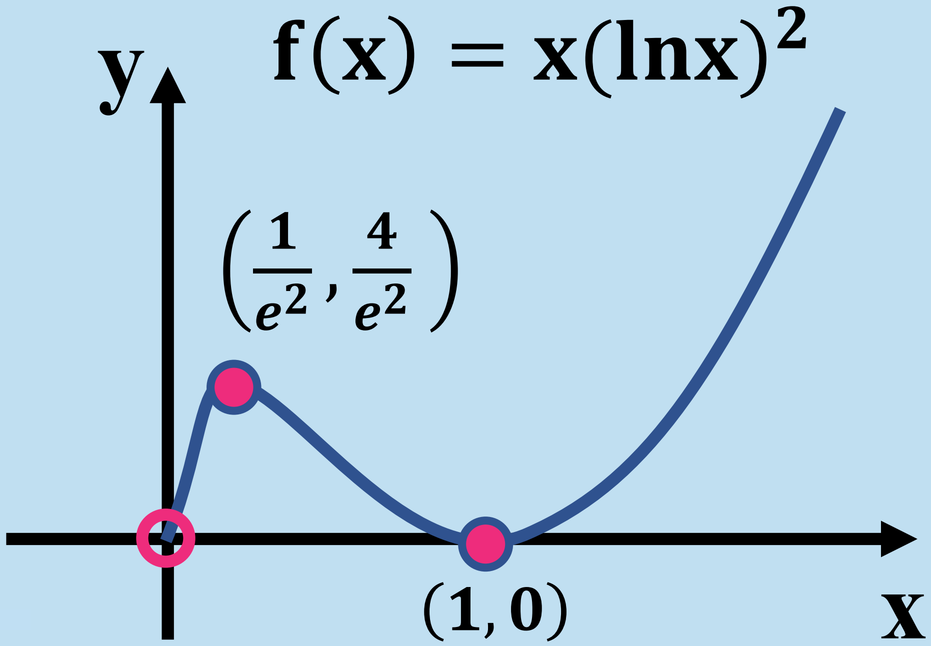
$$x = 1$$

לכן, נקודת החיתוך עם ציר ה-x היא: (1,0)

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

סעיף ד':



ה. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.

(1) מהו שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$? נמק.

סעיף ה':

פתרון

$$g'(x) = f(x)$$

יש למצוא את שיפוע המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

$$g'(1) = f(1) = 0$$

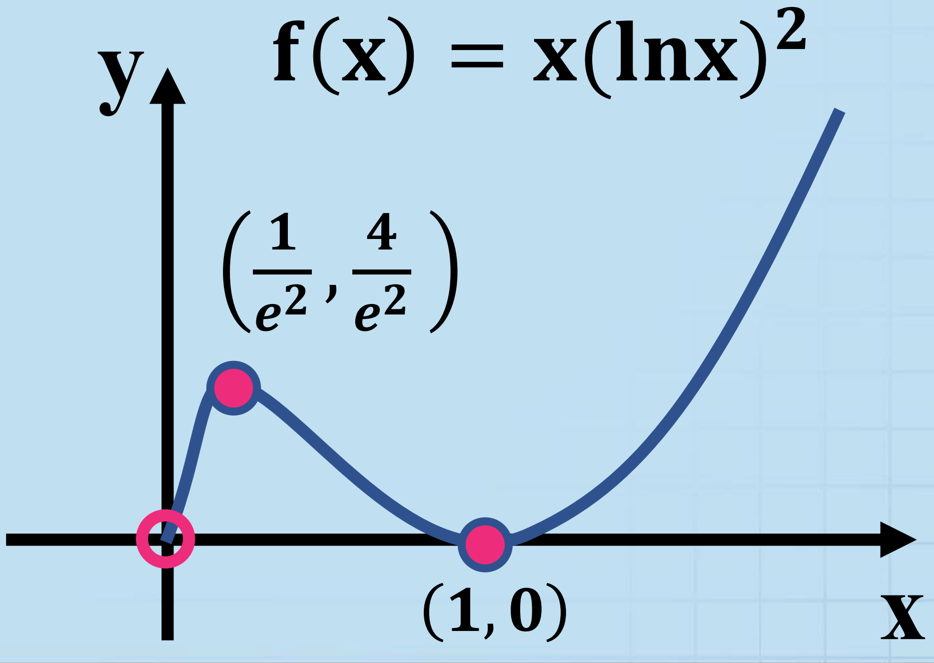
ה. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.

(2) האם יש לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון בנקודה שבה $x = 1$? נמק.

פתרון

<u>סעיף ה':</u>

כדי לדעת האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון, צריך לבדוק האם $f(x)$ משנה סימן בנקודה $x = 1$.



הפונקציה $f(x)$ **לא משנה סימן** בנקודה $x = 1$.

לכן לפונקציה $g(x)$ **אין נקודת קיצון בנקודה $x = 1$**.

בהצלחה