פתרון תרגיל

חקירת פונקציה–
פונקציות לוגריתמיות

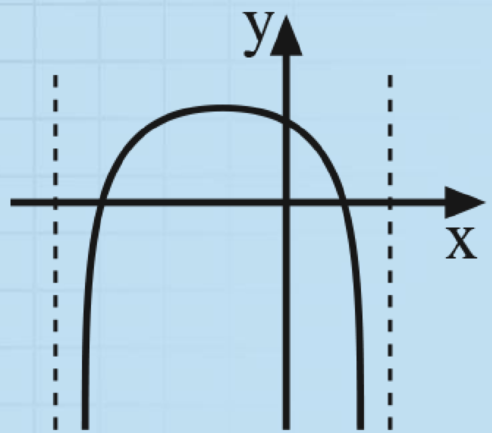
מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 294, ת. 3

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

3) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \ln(-x^2-2x+3)$.



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.

ד. מצא לאילו ערכי k הישר $\mathbf{y = k}$ חותך את גרף הפונקציה:

(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

ה. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה **הנגזרת** $\mathbf{f'(x)}$ עם ציר ה-x.

ו. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$. (תחום ההגדרה של $f'(x)$ הוא כמו תחום ההגדרה של $f(x)$).

ז. ידוע שלפונקציה הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון. שרטט (בצורה כללית) סקיצה של גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. (האסימפטוטות האנכיות של $f(x)$ הן גם האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$).

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = ln(-x^2 - 2x + 3)$$

תחום ההגדרה הוא: $-x^2 - 2x + 3 > 0$

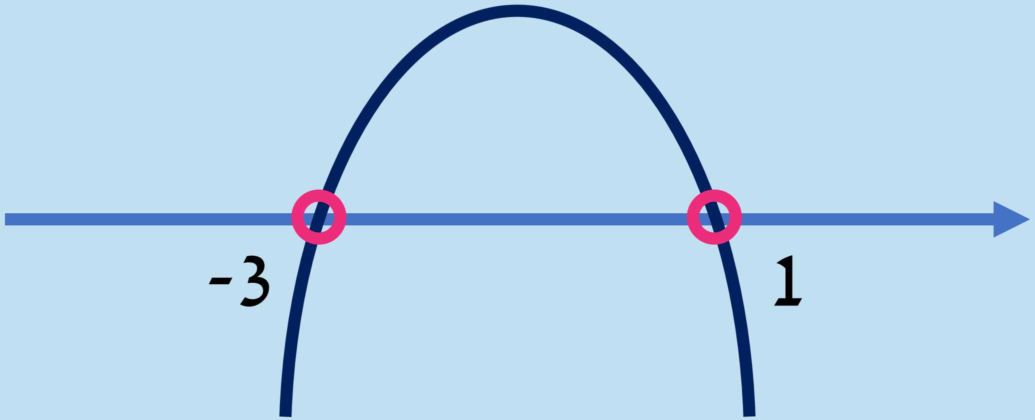
$a = -1$, ולכן זוהי פרבולה **הפוכה**.

$$-x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad , x_2 = -3$$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

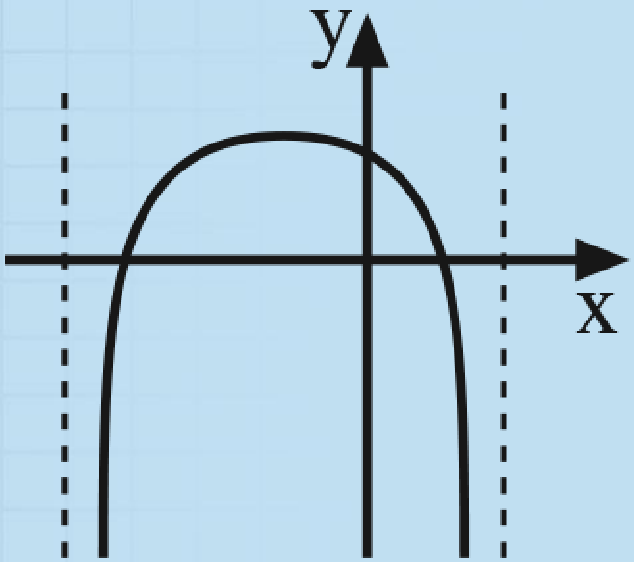


לכן, תחום ההגדרה הוא: $-3 < x < 1$

ב.   מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון

סעיף ב':



$$f(x) = ln(-x^2 - 2x + 3)$$

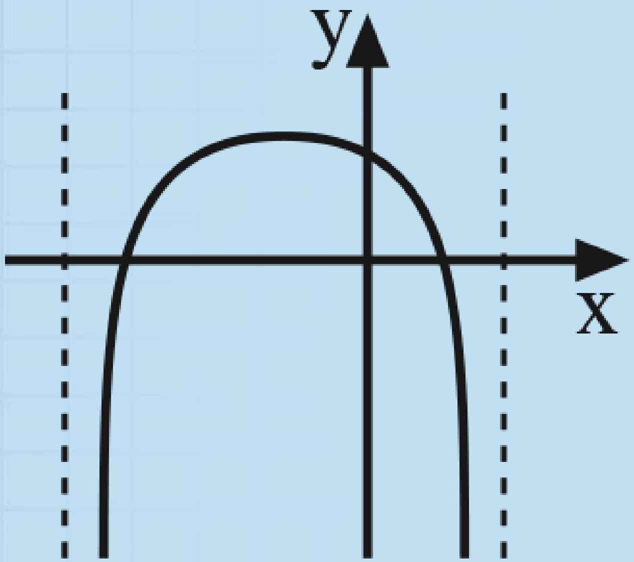
$$f'(x) = \frac{-2x - 2}{(-x^2 - 2x + 3)}$$

$$\frac{-2x - 2}{(-x^2 - 2x + 3)} = 0$$

$$-2x - 2 = 0$$

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון



$$-2x = 2$$

$$x = -1$$

לפי השרטוט, מדובר בנקודת **מקסימום**.

$$f(x) = ln(-x^2 - 2x + 3)$$

$$f(-1) = ln(-(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3)$$

$$f(-1) = ln4$$

לסיכום: $\left(-1, Ln4\right)$ **מקסימום**.

ג. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.

פתרון

סעיף ג':

$$f(x) = ln(-x^2 - 2x + 3)$$

הישר $x = 0$ (ציר ה-y) הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x) = \ln x$.

לכן, לפונקציה יש אסימפטוטות אנכיות כאשר: $-x^2 - 2x + 3 = 0$

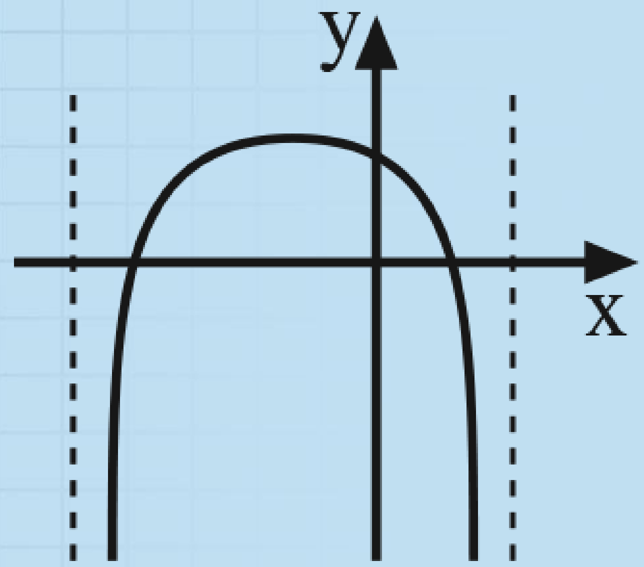
מסקנה: לפונקציה יש שתי אסימפטוטות אנכיות: $x = 1$, $x = -3$

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $-3 < x < 1$,
ולכן לפונקציה **אין אסימפטוטה אופקית.**

ד. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:
(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון

<u>סעיף ד':</u>



(1) הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בנקודה אחת בנקודת הקיצון. כלומר, כאשר $k = \ln 4$

(2) הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות מנקודת הקיצון (לא כולל) **ומטה**. כלומר, כאשר $k < \ln 4$

(3) הישר $y = k$ לא חותך את הפונקציה באף נקודה מנקודת הקיצון (לא כולל) **ומעלה**. כלומר, כאשר $k > \ln 4$

ה. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה **הנגזרת** $\mathbf{f'(x)}$ עם ציר ה-x.

פתרון

<u>סעיף ה':</u>

הפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x כאשר $f'(x) = 0$

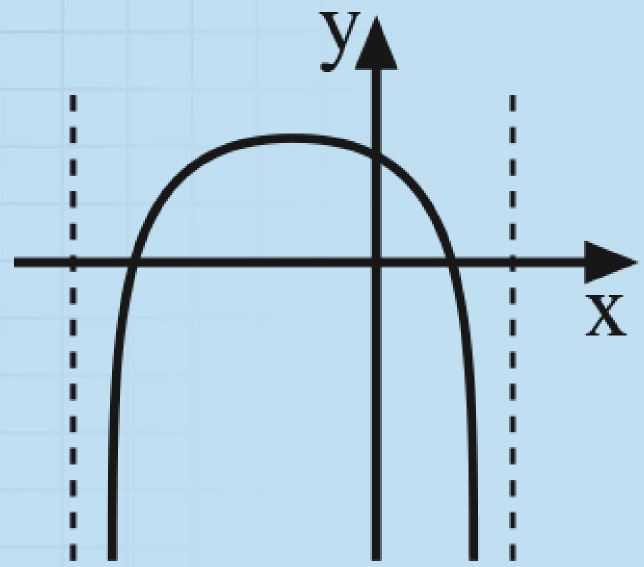
פתרנו את המשוואה הזאת בסעיף ב' כאשר חיפשנו את נקודת הקיצון של $f(x)$, וקיבלנו: $x = -1$.

לכן, נקודת החיתוך היא: $(-1,0)$

ו. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של f′(x).
(תחום ההגדרה של f′(x) הוא כמו תחום ההגדרה של f(x)).

פתרון

סעיף ו':



נתון שתחום ההגדרה של $f'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של $f(x)$, כלומר $-3 < x < 1$

בנוסף, ידוע שנקודת החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה-x היא: $(-1,0)$

$f'(x)$ חיובית כאשר $f(x)$ עולה.

$f'(x)$ שלילית כאשר $f(x)$ יורדת.

לכן, תחום החיוביות של $f'(x)$ הוא: $-3 < x < -1$

לכן, תחום השליליות של $f'(x)$ הוא: $-1 < x < 1$

ז. ידוע שלפונקציה הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון. שרטט (בצורה כללית) סקיצה של גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. (האסימפטוטות האנכיות של $f(x)$ הן גם האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$).

פתרון

סעיף ז':

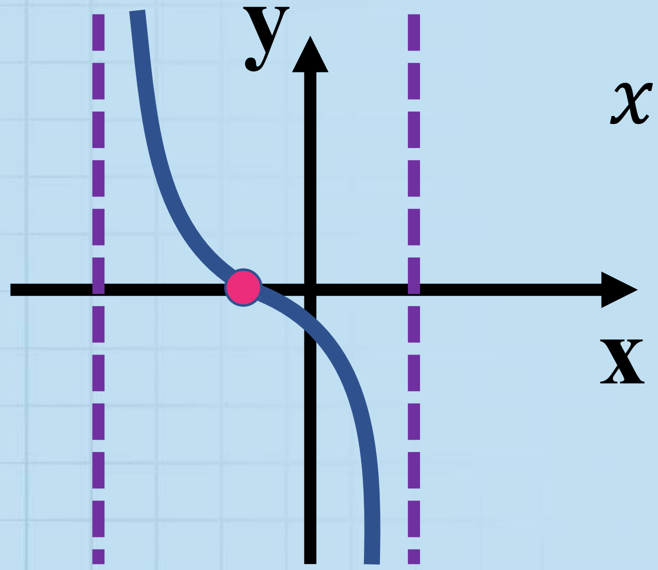
תחום ההגדרה של $f'(x)$ הוא: $-3 < x < 1$

האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$ הן: $x = 1$, $x = -3$

נקודת החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה-x היא: $(-1,0)$

תחום החיוביות של $f'(x)$ הוא: $-3 < x < -1$

לכן, תחום השליליות של $f'(x)$ הוא: $-1 < x < 1$



בהצלחה