פתרון תרגיל

עלייה וירידה– פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 289, ת. 29

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

29) א. הראה שהפונקציה $f(x) = x + \ln x - 1$ עולה לכל $x > 0$.

ב. חשב את $f(1)$ ומצא את התחום בו $f(x)$ חיובית ואת התחום בו היא שלילית.

ג. היעזר בסעיפים א' ו-ב' ומצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = \frac{x^2}{2} + x\ln x - 2x$.

(הדרכה: גזור את הפונקציה $g(x)$).

א. הראה שהפונקציה $f(x) = x + \ln x - 1$ עולה לכל $x > 0$.

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = x + lnx - 1$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x > 0$.

כאשר $x > 0$ מתקיים: $\frac{1}{x} > 0$, ואז גם: $1 + \frac{1}{x} > 0$

קיבלנו שלכל $x > 0$ מתקיים: $f'(x) > 0$. לכן $f(x)$ עולה לכל $x > 0$.

ב. חשב את $f(1)$ ומצא את התחום בו $f(x)$ חיובית ואת התחום בו היא שלילית.

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

$$f(x) = x + lnx - 1$$

$$f(1) = 1 + ln1 - 1 = 1 = 0$$

נבחר ערך של x $(x > 0)$ שנמצא **משמאל** ל- $x = 1$ וערך של x שנמצא **מימין** ל- $x = 1$ כדי לקבוע חיוביות ושליליות.

$$f(0.5) = 0.5 + ln0.5 - 1 = -1.19 < 0$$

$$f(2) = 2 + ln2 - 1 = 1.69 > 0$$

ב. חשב את $f(1)$ ומצא את התחום בו $f(x)$ חיובית ואת התחום בו היא שלילית.

פתרון

מסקנה:

$f(x)$ חיובית כאשר: $x > 1$

$f(x)$ שלילית כאשר: $0 < x < 1$

ג. היעזר בסעיפים א׳ ו-ב׳ ומצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)=\frac{x^2}{2}+x\ln x-2x$.

פתרון

<u>סעיף ג׳:</u>

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+xlnx-2x$$

$$g'(x)=\frac{2x}{2}+1\cdot lnx+x\cdot\frac{1}{x}-2$$

$$g'(x)=x+lnx-1$$

קיבלנו: $g'(x)=f(x)$

ג. היעזר בסעיפים א׳ ו-ב׳ ומצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = \frac{x^2}{2} + x\ln x - 2x$.

פתרון

לכן ל-$g(x)$ יש נקודה החשודה כקיצון כאשר $f(x) = 0$.

כלומר, ל-$g(x)$ יש נקודה החשודה כקיצון כאשר $x = 1$.

בנוסף, קיבלנו ש-$f(x)$ שלילית כאשר $0 < x < 1$. כלומר, $g'(x)$ שלילית

כאשר $0 < x < 1$. לכן $g(x)$ **יורדת** בתחום זה.

ג. היעזר בסעיפים א׳ ו-ב׳ ומצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = \frac{x^2}{2} + x\ln x - 2x$.

פתרון

בנוסף, קיבלנו ש-$f(x)$ חיובית כאשר $x > 1$. כלומר, $g'(x)$ חיובית

כאשר $x > 1$. לכן $g(x)$ עולה בתחום זה.

מסקנה: ל- $g(x)$ יש **נקודת מינימום** בנקודה שבה $x = 1$.

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + xlnx - 2x$$

$$g(1) = \frac{1^2}{2} + 1ln1 - 2 \cdot 1 = -1.5$$

ג. היעזר בסעיפים א׳ ו-ב׳ ומצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = \frac{x^2}{2} + x\ln x - 2x$.

פתרון

לסיכום:

ל- $g(x)$ יש נקודת מינימום בנקודה $(1, -1.5)$

בהצלחה