פתרון תרגיל

נקודות קיצון-פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 285, ת. 44

השאלה

44) נתונה הפונקציה $f(x) = \ln^2 x - 2\ln x - 8$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. $g(x)$ היא הפונקציה $\mathbf{g(x) = (f(x))^2}$. היעזר בתשובות לסעיפים א' ו-ב' ומצא את שיעורי ה-x של הנקודות שעבורן $g'(x) = 0$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

פתרון

<u>סעיף א':</u>

$$y = ln^2x - 2\ln x - 8$$

$$ln^2x - 2\ln x - 8 = 0$$

נסמן: $\boldsymbol{t = lnx}$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$t = -2$ $\qquad$ $t = 4$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

פתרון

$t = -2$ | $t = 4$

$lnx = -2$ | $lnx = 4$

$x = e^{-2}$ | $x = e^4$

נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x הן: $\left(e^4,0\right)$ ו- $\left(\frac{1}{e^2},0\right)$

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון

סעיף ב':

$$y = ln^2x - 2\ln x - 8$$

$$y' = 2lnx \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{2lnx}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון

$$2lnx - 2 = 0$$

$$2lnx = 2$$

$$lnx = 1$$

$$x = e$$

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון

$$y' = 2lnx \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{2lnx - 2}{x}$$

$$y'' = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (2lnx - 2) \cdot 1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{4 - 2lnx}{x^2}$$

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון

$$y''(e) = \frac{4 - 2lne}{e^2} = \frac{2}{e^2} > 0$$

לכן מדובר בנקודת **מינימום**.

$$x = e \rightarrow y = ln^2x - 2\ln x - 8$$

$$y = ln^2e - 2lne - 8$$

ב. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

פתרון

$$y = ln^2 e - 2lne - 8$$

$$y = 1^2 - 2 - 8$$

$$y = -9$$

לסיכום: $(e, -9)$ **מינימום**.

ג. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = (f(x))^2$. היעזר בתשובות לסעיפים א' ו-ב' ומצא את שיעורי ה-x של הנקודות שעבורן $g'(x) = 0$.

פתרון

סעיף ג':

$$g(x) = (f(x))^2$$

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$$

$$2f(x) \cdot f'(x) = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$x = e^4, x = \frac{1}{e^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = e$$

ג. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = (f(x))^2$. היעזר בתשובות לסעיפים א' ו-ב' ומצא את שיעורי ה-x של הנקודות שעבורן $g'(x) = 0$.

פתרון

לסיכום:

שיעורי ה-x שבהם $g'(x) = 0$ הם:

$$x = \frac{1}{e^2} \quad , \quad x = e^4 \quad , \quad x = e$$

בהצלחה