פתרון תרגיל

נקודות קיצון-פונקציות לוגריתמיות

מתמטיקה (4-5 יח"ל) חלק א'

581-481 , עמ' 284, ת. 37

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

37) נתונה הפונקציה $y = \frac{1-a+\ln x}{x}$.

א. הבע באמצעות a את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. הוכח שלכל ערך של a יש לפונקציה נקודת מקסימום בנקודה (e^{a}, e^{-a}).

א. הבע באמצעות a את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

פתרון

<u>סעיף א':</u>

$$y=\frac{1-a+lnx}{x}$$

$$\frac{1-a+lnx}{x}=0$$

$$1-a+lnx=0$$

$$lnx=a-1$$

א. הבע באמצעות a את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

פתרון

$$\ln x = a - 1$$

$$x = e^{a-1}$$

נקודת החיתוך עם ציר ה-x היא: $\left(e^{a-1},0\right)$

ב. הוכח שלכל ערך של a יש לפונקציה נקודת מקסימום בנקודה (e^{a}, e^{-a}).

פתרון

סעיף ב':

$$y = \frac{1 - a + lnx}{x}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 - a + lnx) \cdot 1}{x^2}$$

$$y' = \frac{1 - (1 - a + lnx) \cdot 1}{x^2}$$

ב. הוכח שלכל ערך של a יש לפונקציה נקודת מקסימום בנקודה (e^{a}, e^{-a}).

פתרון

$$y' = \frac{a - lnx}{x^2}$$

$$\frac{a - lnx}{x^2} = 0$$

$$a - lnx = 0$$

$$lnx = a$$

ב. הוכח שלכל ערך של a יש לפונקציה נקודת מקסימום בנקודה (e^{a}, e^{-a}).

פתרון

$$x = e^{a}$$

$$y' = \frac{a - lnx}{x^{2}}$$

מספיק להציב את $x = e^{a}$ **בנגזרת של המונה** כדי לקבוע את סוג הקיצון.

הסיבה: e^{a} **מאפס** את המונה של y', ולכן המכפלה עם הגורמים: נגזרת המונה והמכנה החיובי **היא זו שתקבע את הסימן של** y'', השאר יתאפס.

ב. הוכח שלכל ערך של a יש לפונקציה נקודת מקסימום בנקודה (e^{a}, e^{-a}).

פתרון

נגזרת המונה $= -\frac{1}{x}$

כשמציבים $x = e^{a}$ בנגזרת של המונה, מקבלים: $-\frac{1}{e^{a}}$.

כלומר, מתקבל מספר **שלילי**, ולכן מדובר בנקודת **מקסימום**.

$$y = \frac{1 - a + lnx}{x}$$

$$x = e^{a} \rightarrow y = \frac{1 - a + lne^{a}}{e^{a}}$$

ב. הוכח שלכל ערך של a יש לפונקציה נקודת מקסימום בנקודה (e^{a}, e^{-a}).

פתרון

$$y = \frac{1 - a + a}{e^{a}}$$

$$y = \frac{1}{e^{a}} = e^{-a}$$

הוכחנו שלכל a יש לפונקציה נקודת מקסימום בנקודה (e^{a}, e^{-a}).

בהצלחה