פתרון מתכונת

שאלה 2–מבחן 3

שאלון 581

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

כל הזכויות שמורות לוויסקול לימודים מקוונים בע״מ

השאלה

2) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 2a_n \cdot n + a_n + 6n + 3$.

א. הוכיחו שהסדרה שמוגדרת על ידי $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n + 3}$ היא סדרה חשבונית.

ב. מהסדרה החשבונית b_n שהתקבלה מחקו את האיברים שבמקומות: 4, 8, 12,

(כלומר נמחקו האיברים $b_4, b_8, b_{12}, \dots$). לאחר המחיקה נותרו 15 איברים.

מצאו את מספר האיברים בסדרה b_n.

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2.

מצאו את a_1.

$a_{n+1} = 2a_n \cdot n + a_n + 6n + 3$ ‏ $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n + 3}$ היא סדרה חשבונית.

פתרון

נפשט אלגברית את הביטוי עבור a_{n+1}:

$$a_{n+1} = a_n(2n+1) + 3(2n+1) = (2n+1)(a_n+3)$$

$$\Downarrow$$

$$b_n = \frac{(2n+1)(a_n+3)}{a_n+3} = 2n+1$$

$a_{n+1} = 2a_n \cdot n + a_n + 6n + 3$

$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n + 3}$ היא סדרה חשבונית.

פתרון

צ.ל.: $b_n = 2n + 1$ היא סדרה חשבונית

סדרה חשבונית היא סדרה בה ההפרש בין **כל** איבר לקודמו,
פרט לאיבר הראשון, קבוע.

$b_{n+1} - b_n =$ קבוע

$a_{n+1} = 2a_n \cdot n + a_n + 6n + 3$ $\quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n + 3}$ היא סדרה חשבונית.

פתרון

$$b_n = 2n + 1$$

$$b_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{b_{n+1} - b_n = 2}$$

ב. מהסדרה החשבונית b_n שהתקבלה מחקו את האיברים שבמקומות: 4, 8, 12, ... (כלומר נמחקו האיברים $b_4, b_8, b_{12},...$). לאחר המחיקה נותרו 15 איברים. מצאו את מספר האיברים בסדרה b_n.

פתרון

נתאר סכמטית את המחיקה :

$$\underbrace{b_1, b_2, b_3, \cancel{b_4}}, b_5, b_6, b_7, \cancel{b_8}, b_9, b_{10}, b_{11}, \cancel{b_{12}}, \ldots$$

מכל קבוצה של 4 איברים מחקו 1 , כלומר – נשארו 3

על מנת שיישארו 15 איברים, עלינו להישאר עם 5 קבוצות

כלומר, **כמות האיברים המקורית בסדרה b_n היא $n = 20$**

(התחלנו עם 5 קבוצות של 4 איברים בכל אחת)

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

$$S_{15\,(left)} = 35 \cdot a_2$$

נבטא את כל הגורמים באמצעות a_1 ליצירת משוואה

אגף שמאל:

$$S_{15\,(left)} = S_{b_{20}} - (b_4 + b_8 + b_{12} + b_{16} + b_{20})$$

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

עפ״י נוסחת סכום סדרה חשבונית בשילוב נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית

$$S_{b_n} = \frac{n}{2}[2b_1 + (n-1)d_b]$$

$n = 20$ $\quad$ $b_n = 2n + 1$ $\quad$ $d_b = 2$

$b_1 = 3$

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

$\Downarrow$

$$S_{b_{20}} = \frac{20}{2}(2 \cdot 3 + 19 \cdot 2) = 440$$

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

$$b_4 + b_8 + b_{12} + b_{16} + b_{20} =$$

איבר כללי בסדרה חשבונית:

$$b_n = b_1 + (n-1)d_b$$

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

$$b_4 = 3 + 3 \cdot 2 = 9$$

$$b_8 = 3 + 7 \cdot 2 = 17$$

$$b_{12} = 3 + 11 \cdot 2 = 25$$

$$b_{16} = 3 + 15 \cdot 2 = 33$$

$$b_{20} = 3 + 19 \cdot 2 = 41$$

$$b_4 + b_8 + b_{12} + b_{16} + b_{20} = 125$$

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

$$b_4 + b_8 + b_{12} + b_{16} + b_{20} =$$

דרך נוספת, ניצור סדרה חשבונית חדשה ובה ההפרש יהיה $4d_b$:

$$b_4\,, b_8\,, b_{12}\,, b_{16}\,, b_{20}$$

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

$\Downarrow$

$$S_{15\,(left)} = S_{b_{20}} - (b_4 + b_8 + b_{12} + b_{16} + b_{20})$$

$$= 440 - 125 = \mathbf{315}$$

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

אגף ימין:

עפ"י סעיף א': $$a_{n+1} = (2n+1)(a_n+3)$$

$$a_2 = (2 \cdot 1 + 1)(a_1 + 3) = 3a_1 + 9$$

$$\Downarrow$$

$$35 \cdot a_2 = \mathbf{35(3a_1 + 9)}$$

ג. נתון שסכום 15 האיברים הראשונים שנותרו בסדרה גדול פי 35 מ- a_2. מצאו את a_1

פתרון

$\Downarrow$

$$S_{15\,(left)} = 35 \cdot a_2$$

$$315 = 35(3a_1 + 9)$$

$$9 = 3a_1 + 9$$

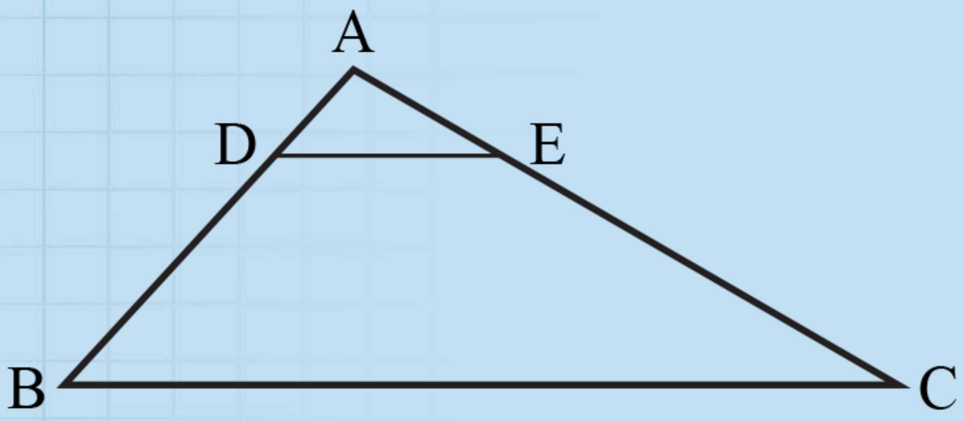
$$\boldsymbol{a_1 = 0}$$

פתרון מתכונת

שאלה 4–מבחן 4

שאלון 581

השאלה



4) נתון משולש ABC ובו: $BC \parallel DE$.

אלכסוני המרובע $DECB$ נפגשים בנקודה O.

דרך הנקודה O מעבירים ישר, המקביל לצלע BC,

וחותך את הצלע AB בנקודה M ואת הצלע AC בנקודה N.

א. הוכיחו כי $OM = ON$.

בנוסף נתון כי שטח המרובע $DECB$ גדול פי 8 משטח המשולש ADE.

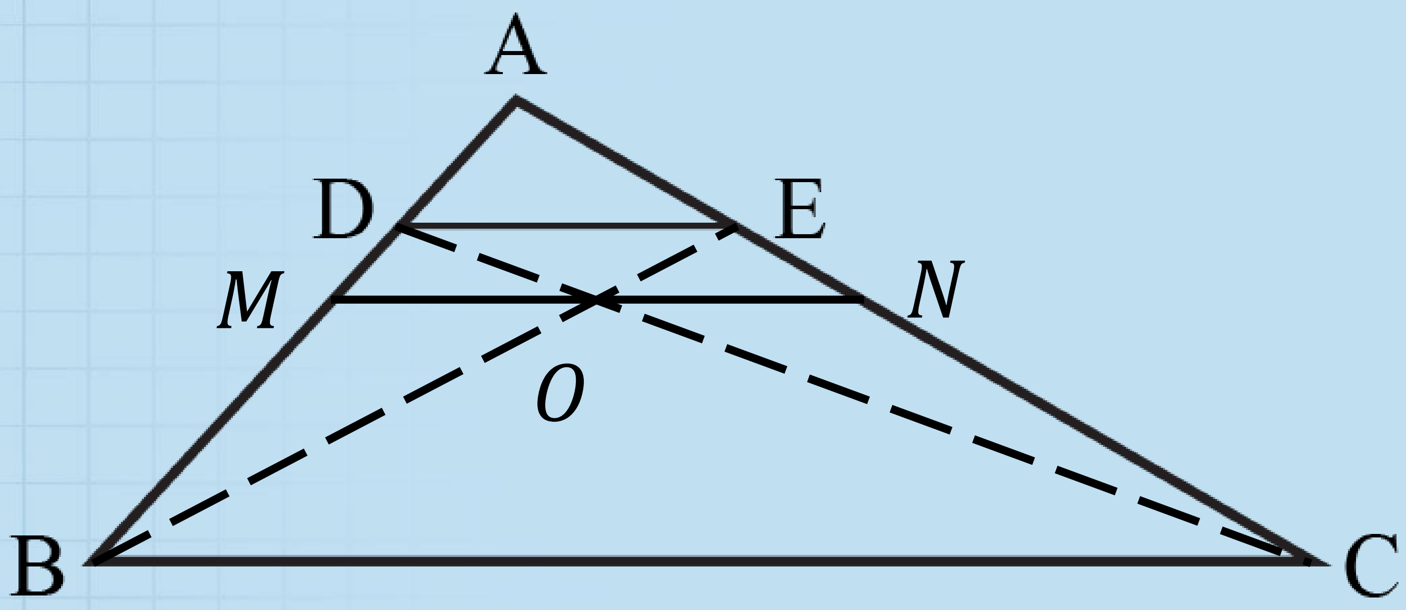
ב. (1) חשבו את היחס $\frac{DE}{BC}$.

(2) הוכיחו כי הנקודה M היא אמצע הצלע AB והנקודה N היא אמצע הצלע AC.

א. הוכיחו כי $OM = ON$.

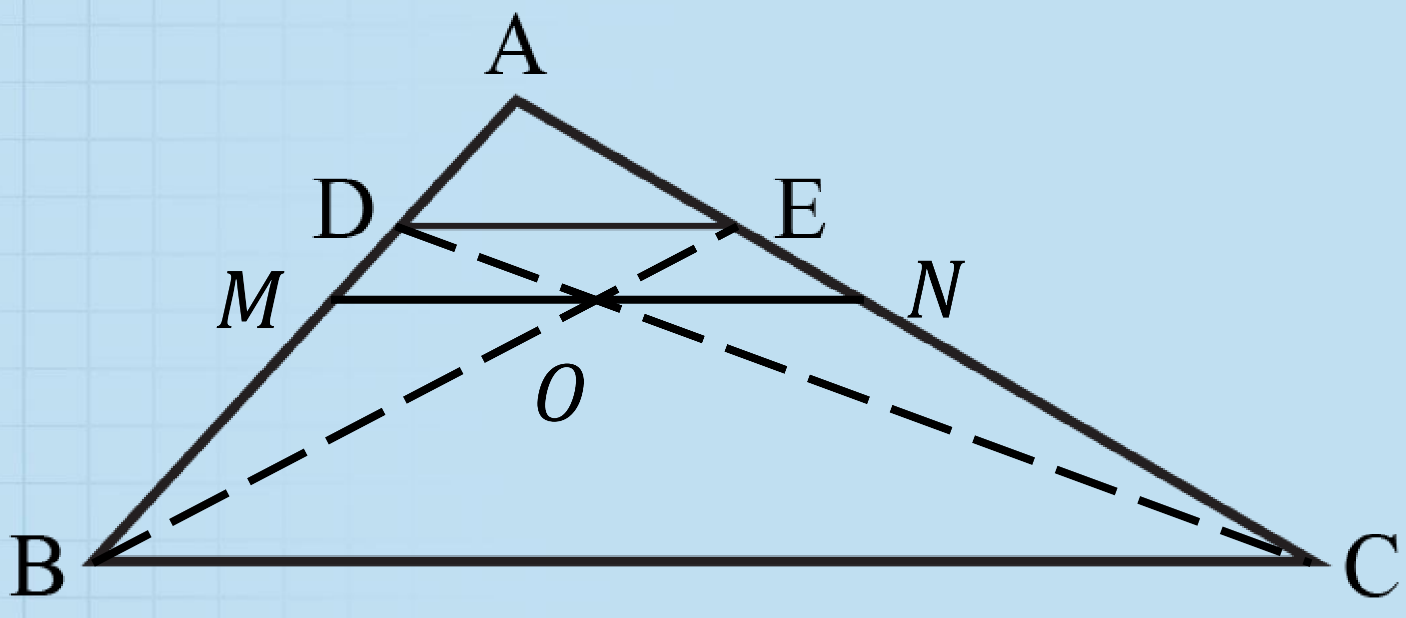
פתרון

נשלים את נתוני השאלה
על גבי הסרטוט:



א. הוכיחו כי $OM = ON$.

פתרון



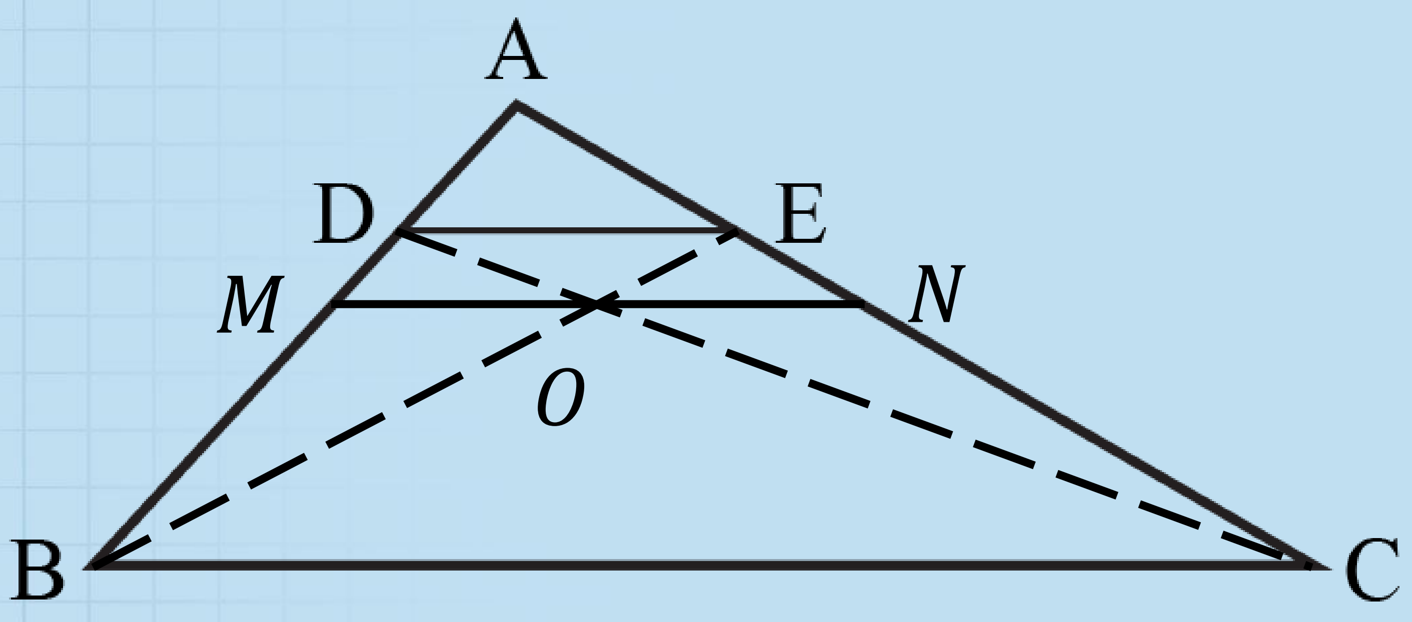
$$DE \parallel BC$$

עפ"י משפט תאלס לשעון חול:
("מטה חלקי מעלה")

$$\frac{BC}{DE} = \frac{CO}{OD} = \frac{BO}{OE}$$

א. הוכיחו כי $OM = ON$.

פתרון



$$MN \parallel BC$$

עפ"י ההרחבה למשפט תאלס :
("מטה חלקי מעלה")

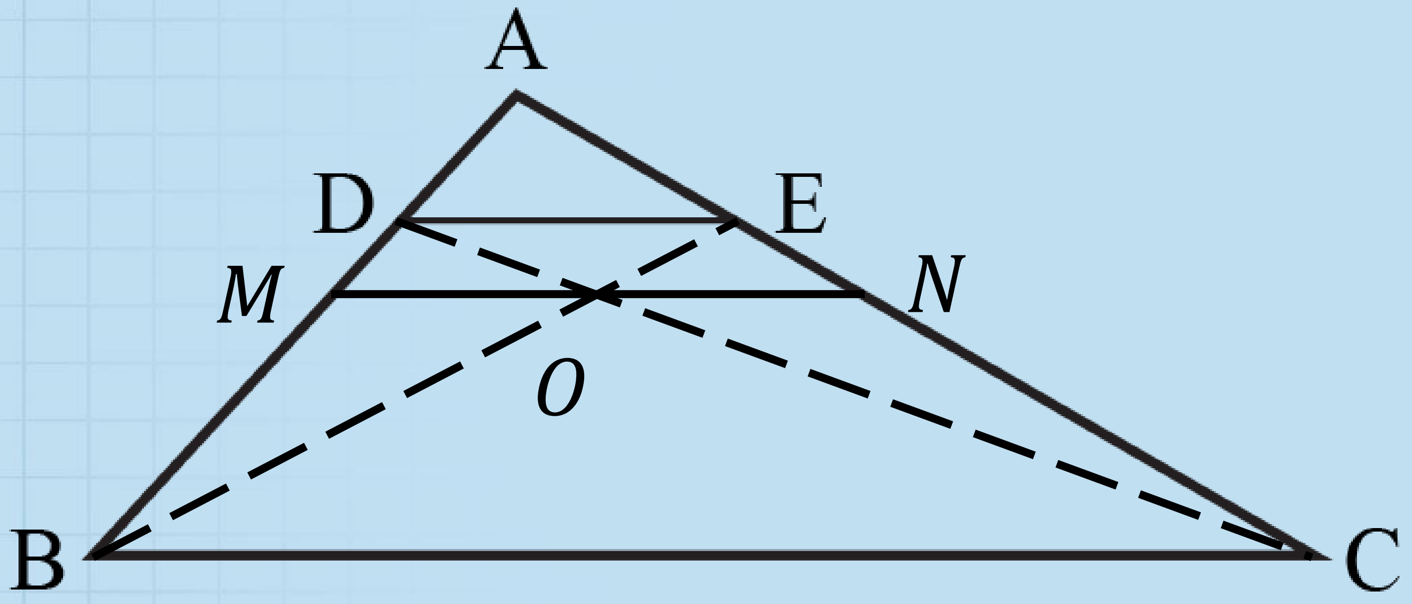
$$\frac{BC}{MO} = \frac{CD}{DO} = \frac{DO + OC}{DO}$$

$$\frac{BC}{MO} = 1 + \frac{OC}{DO}$$

א. הוכיחו כי $OM = ON$.

פתרון

$$MN \parallel BC$$



עפ"י ההרחבה למשפט תאלס:
("מטה חלקי מעלה")

$$\frac{BC}{NO} = \frac{BE}{EO} = \frac{EO + OB}{EO}$$

$$\frac{BC}{NO} = 1 + \frac{OB}{EO}$$

א. הוכיחו כי $OM = ON$.

פתרון

$$\frac{BC}{NO} = 1 + \frac{OB}{EO} \qquad\qquad \frac{BC}{MO} = 1 + \frac{OC}{DO}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{BC}{NO} = \frac{BC}{MO}$$

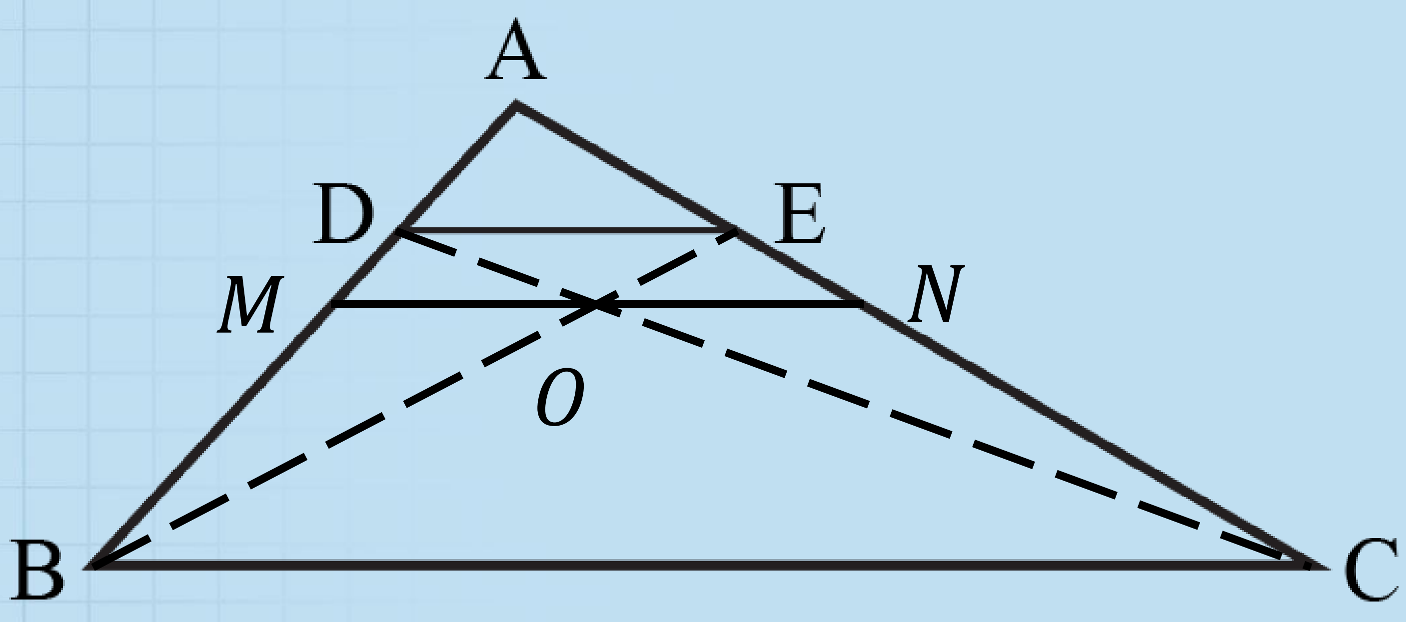
$$NO = MO$$

מ.ש.ל א'

בנוסף נתון כי שטח המרובע DECB גדול פי 8 משטח המשולש ADE.

ב. (1) חשבו את היחס $\frac{DE}{BC}$

פתרון



$$S_{DECB} = 8 \cdot S_{\Delta ADE}$$

$$\Downarrow$$

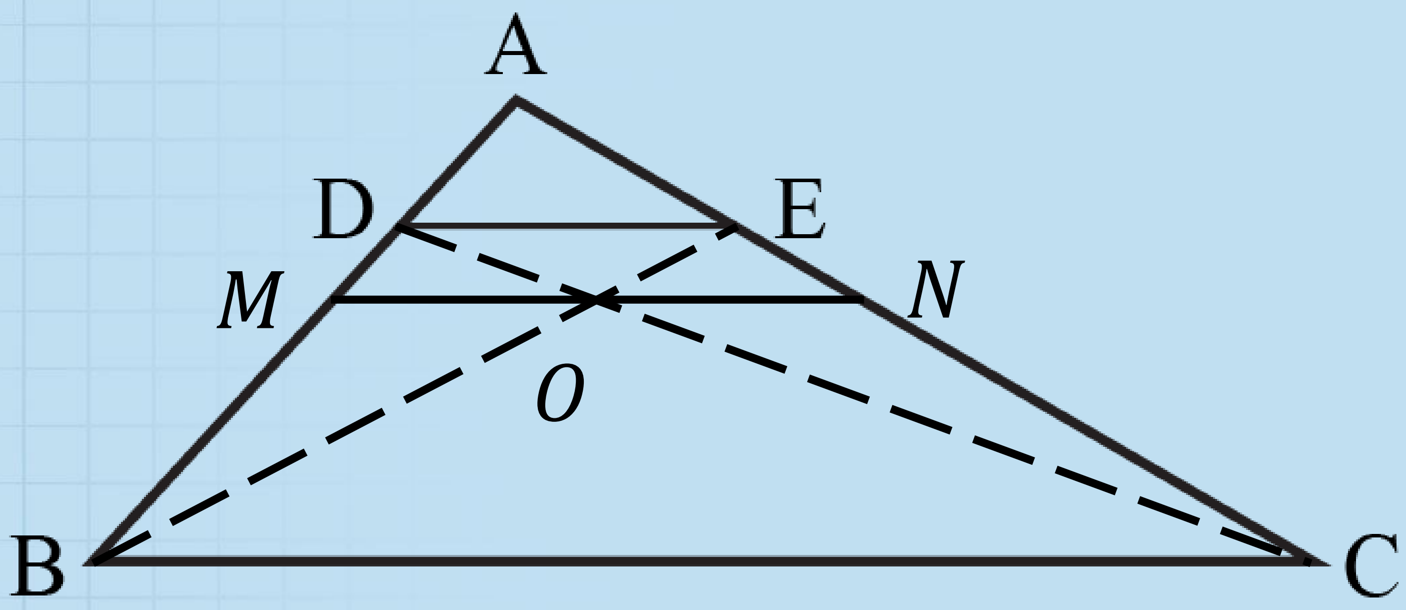
$$S_{\Delta ABC} = 9 \cdot S_{\Delta ADE}$$

$$\frac{\boldsymbol{S_{\Delta ADE}}}{\boldsymbol{S_{\Delta ABC}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$$

בנוסף נתון כי שטח המרובע DECB גדול פי 8 משטח המשולש ADE.

ב. (1) חשבו את היחס $\frac{DE}{BC}$

פתרון



$DE \parallel BC$

$\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$

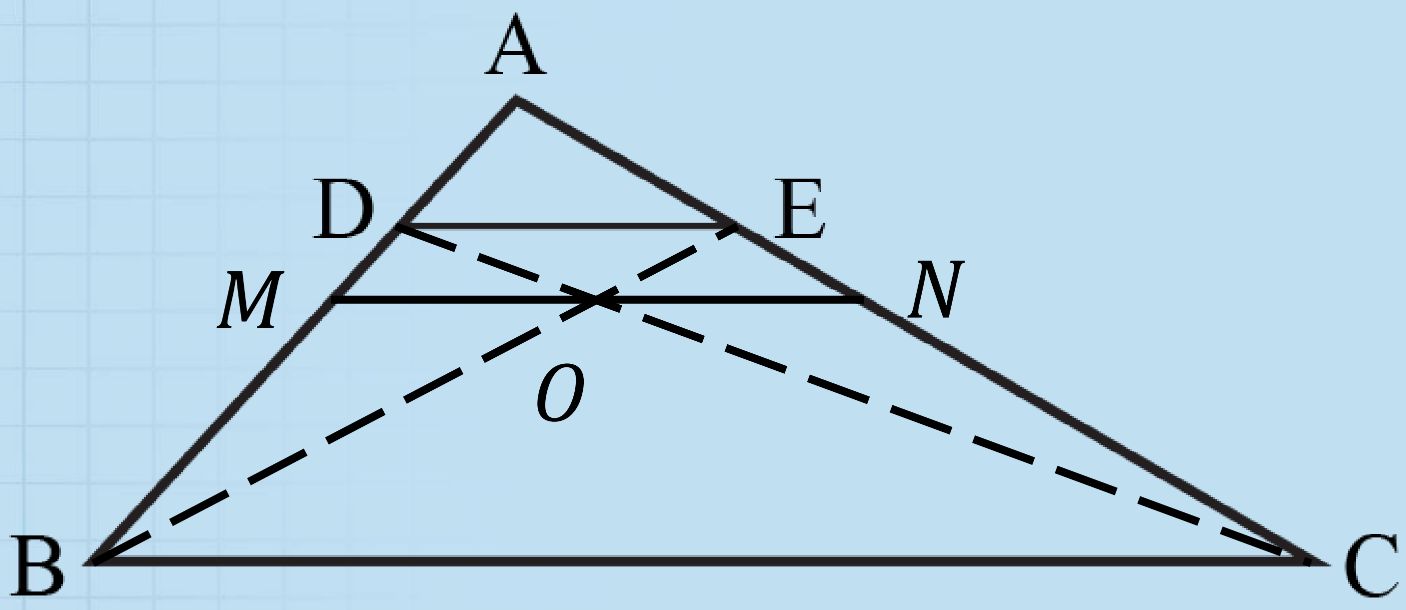
זוויות מתאימות בין המקבילים והחותך AB שוות

$\measuredangle A$ משותפת

בנוסף נתון כי שטח המרובע DECB גדול פי 8 משטח המשולש ADE.

ב. (1) חשבו את היחס $\frac{DE}{BC}$

פתרון



$\Delta ADE \cong \Delta ABC$

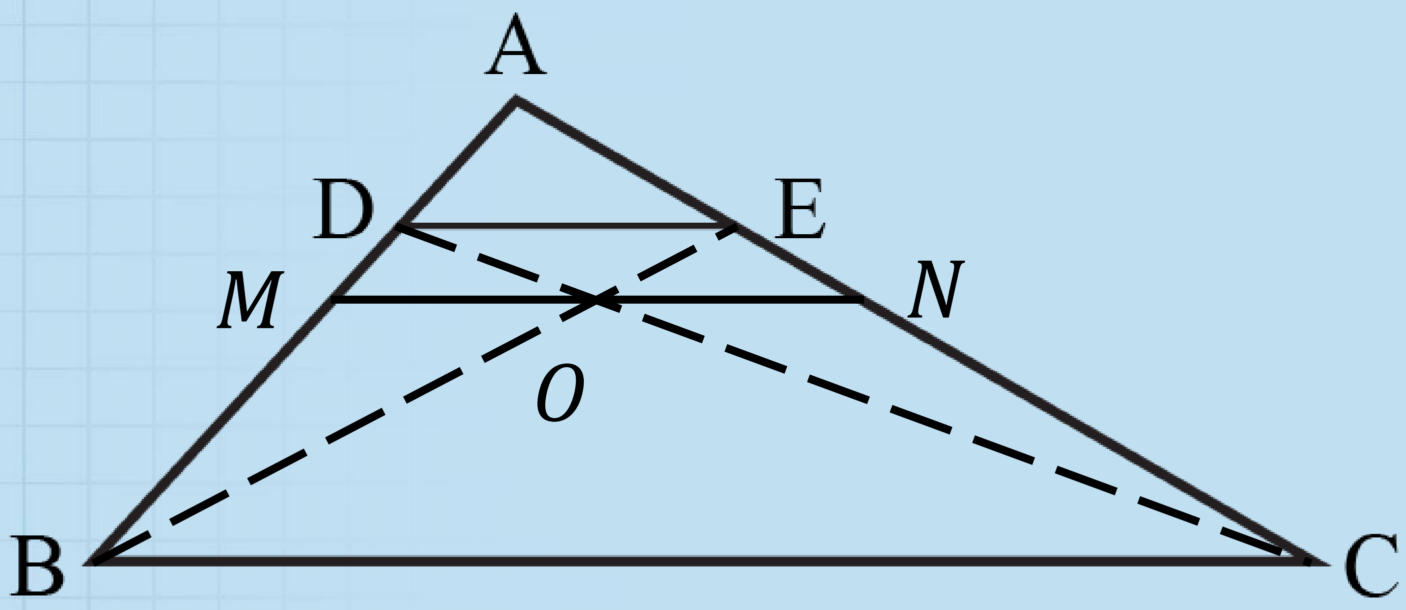
דמיון ז.ז.

יחס השטחים בין משולשים
דומים שווה לריבוע
יחס הדמיון

בנוסף נתון כי שטח המרובע DECB גדול פי 8 משטח המשולש ADE.

ב. (1) חשבו את היחס $\frac{DE}{BC}$

פתרון



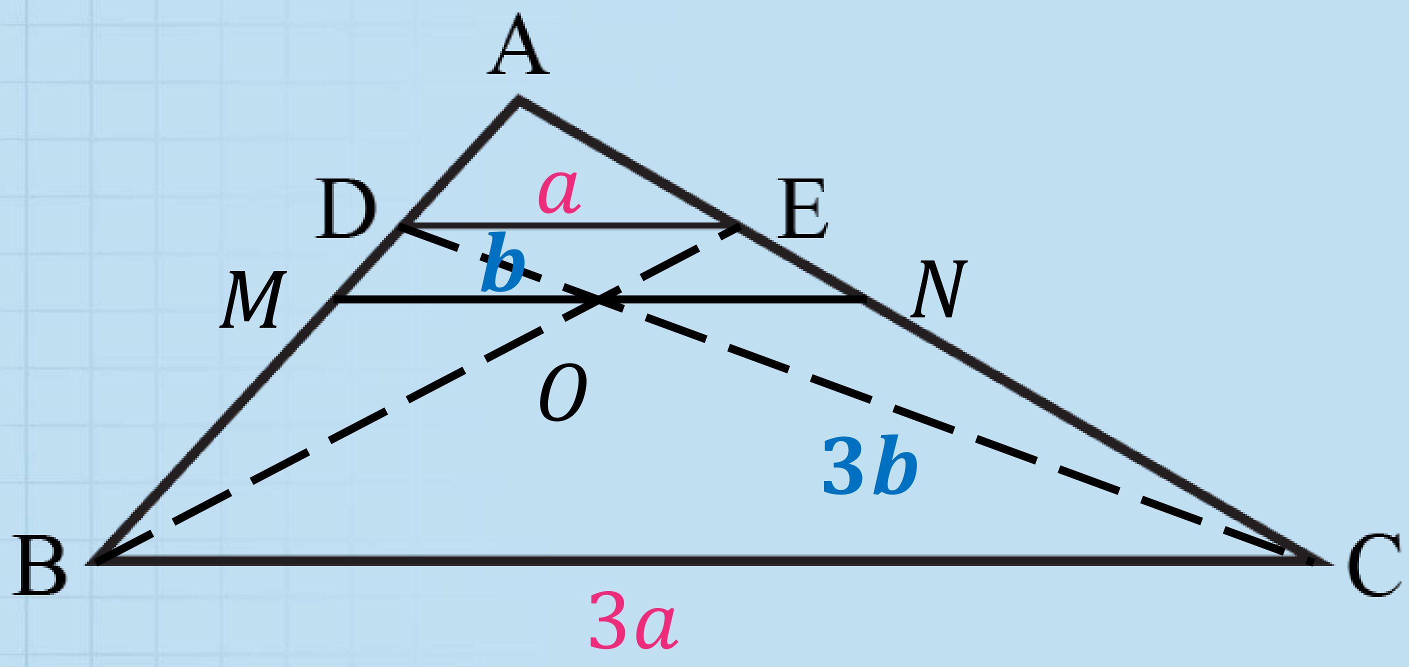
$\Downarrow$

$$\text{יחס דמיון} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$$

מ.ש.ל ב' (1)

(2) הוכיחו כי הנקודה M היא אמצע הצלע AB והנקודה N היא אמצע הצלע AC.

פתרון



עפ"י סעיף ב' (1):

$$\frac{DE}{BC}=\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

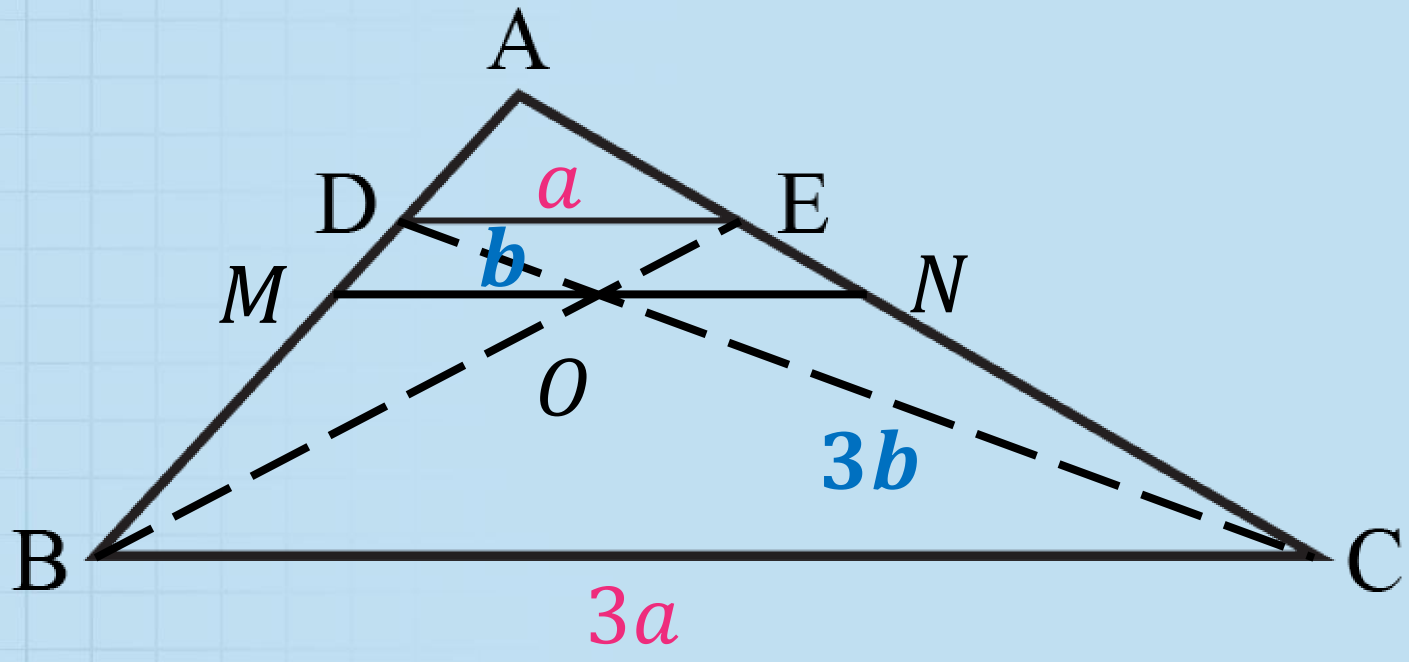
עפ"י משפט תאלס לשעון חול:

$$\boldsymbol{DE \parallel BC}$$

$$\frac{DE}{BC}=\frac{OD}{CO}=\frac{1}{3}$$

(2) הוכיחו כי הנקודה M היא אמצע הצלע AB והנקודה N היא אמצע הצלע AC.

פתרון



$$\Downarrow$$

$$\frac{DO}{DC}=\frac{b}{b+3b}=\frac{1}{4}$$

$$\Downarrow$$

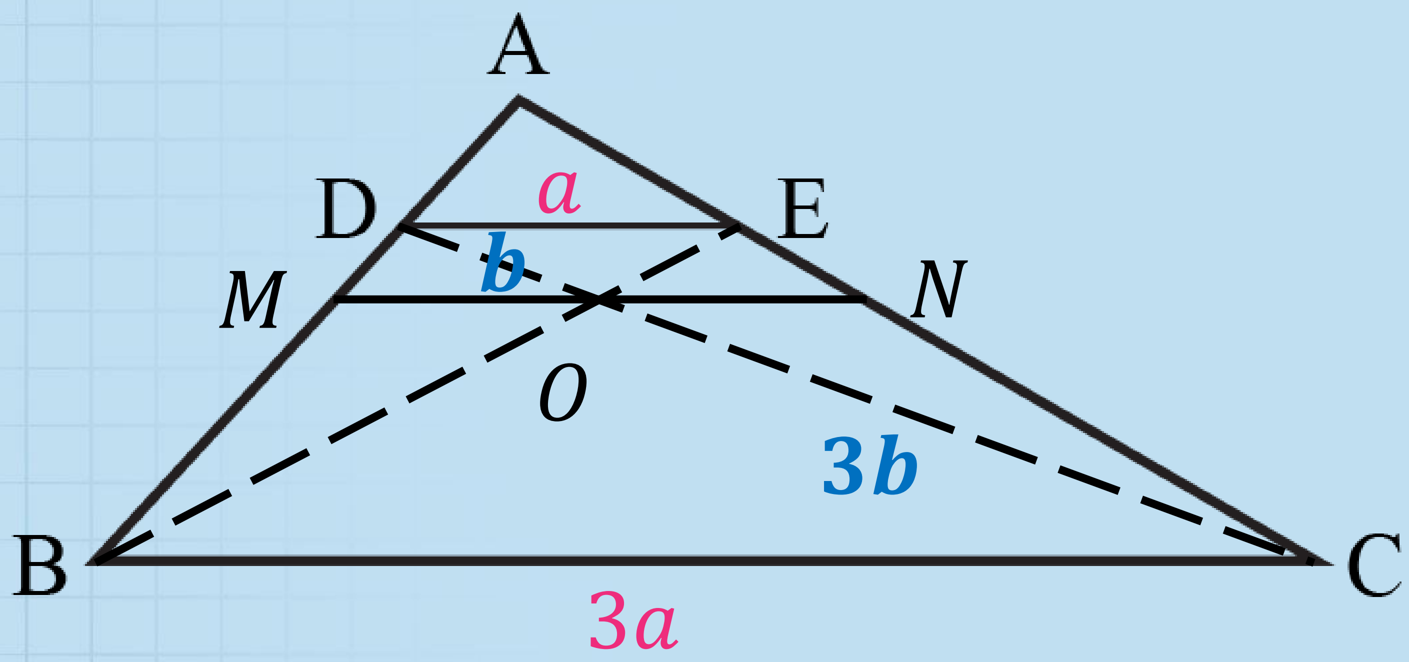
עפ"י ההרחבה למשפט תאלס:

$$\boldsymbol{MN \parallel BC}$$

$$\frac{DO}{DC}=\frac{MO}{BC}=\frac{1}{4}$$

(2) הוכיחו כי הנקודה M היא אמצע הצלע AB והנקודה N היא אמצע הצלע AC.

פתרון



$\Downarrow$

$$\frac{MO}{3a} = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{MO = \frac{3}{4}a}$$

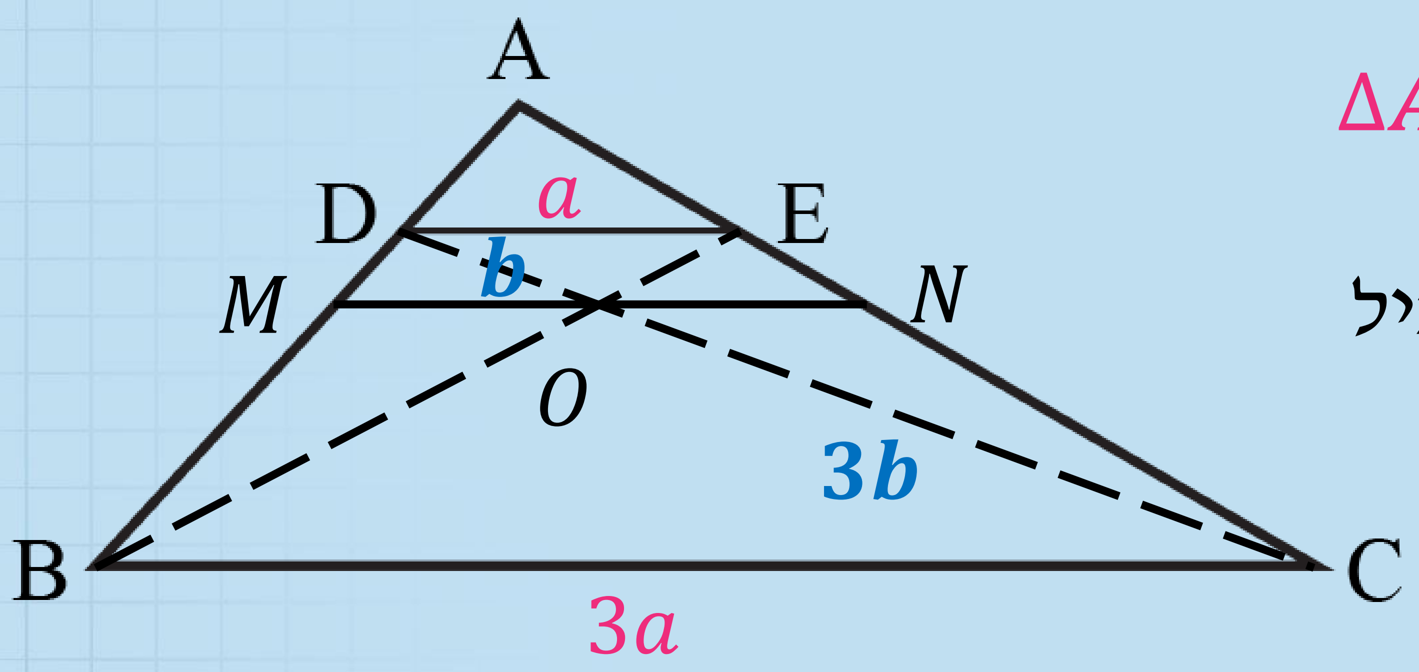
$\Downarrow$

$$\boldsymbol{MN = 2MO = 1.5a}$$

(2) הוכיחו כי הנקודה M היא אמצע הצלע AB והנקודה N היא אמצע הצלע AC.

פתרון

⇓



MN קטע אמצעים במשולש ΔABC

קטע המחבר בין שתי צלעות, מקביל לשלישית ושווה למחצית אורכה

מ.ש.ל ב' (2)

פתרון מתכונת

שאלה 7–מבחן 2

שאלון 581

השאלה

7) $f(x)$ היא פונקציה חיובית וגזירה בכל תחום ההגדרה שלה.

א. הראו שלפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ יש נקודות קיצון עבור אותם שיעורי ה-x,

ונקודות הקיצון האלה הן מאותו סוג (מינימום או מקסימום).

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=2\cos x-\cos 2x+4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(1) האם הפונקציה היא זוגית? או אי-זוגית? נמקו.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

(3) הסבירו מדוע גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה-x בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז ימינה ב-π כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

(1) הוסיפו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) בטאו את הפונקציה $g(x)$ בעזרת x. פשטו ככל האפשר.

השאלה

ד. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה f, הצירים והישר $x=-\pi$.

הביעו בעזרת S את $\int_0^{2\pi} g(x)dx$. נמקו את תשובתכם.

ה. היעזרו בתשובתכם לסעיף א', מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)=\sqrt{2\cos x-\cos 2x+4}$

וקבעו את סוגן.

א. הראו שלפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$ יש נקודות קיצון עבור אותם שיעורי ה-x,
ונקודות הקיצון האלה הן מאותו סוג (מינימום או מקסימום).

פתרון

$$g'(x)=\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

לשתי הנגזרות, $f'(x)$ ו- $g'(x)$, אותם תחומי חיוביות ושליליות

ומכאן שלשתי הפונקציות אותם תחומי עלייה וירידה

ואותם שיעורי x עבור נקודות הקיצון, שיהיו מאותו הסוג

$f(x) = 2\cos x - \cos 2x + 4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(1) האם הפונקציה היא זוגית? או אי-זוגית? נמקו.

פתרון

$$f(-x) = 2\cos(-x) - \cos[2(-x)] + 4$$

$$= 2\cos x - \cos 2x + 4 = f(x)$$

הפונקציה מקיימת חוקיות זוגית

$f(x) = 2\cos x - \cos 2x + 4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

פתרון

נדרוש: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x = 0$$

$$\sin x = \sin 2x$$

$$x = 2x + 2\pi k \qquad\qquad x = \pi - 2x + 2\pi k$$

$$x = 2\pi k \qquad\qquad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k$$

$f(x) = 2\cos x - \cos 2x + 4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

פתרון

נחולל פתרונות בתחום השאלה, $-\pi \le x \le \pi$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k$$

$$x = 2\pi k$$

$$x = -\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$$

$$x = 0$$

$f(x) = 2\cos x - \cos 2x + 4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

פתרון

נמצא את שיעורי ה- y של הנקודות החשודות באמצעות הצבה בפונקציה

חשודים לקיצון:

$$(\pi, 1) \qquad \left(\frac{\pi}{3}, 5.5\right) \qquad (0, 5) \qquad \left(-\frac{\pi}{3}, 5.5\right) \qquad (-\pi, 1)$$

הנקודות $(\pi,1)$ ו- $(-\pi,1)$ נקודות קיצון מסוג קצה

$f(x)=2\cos x-\cos 2x+4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

פתרון

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת הראשונה $f'(x)$

$$f'(x)=-2\sin x+2\sin 2x$$

$(-\pi,1)$	↗	$\left(-\frac{\pi}{3},5.5\right)$	↘	$(0,5)$	↗	$\left(\frac{\pi}{3},5.5\right)$	↘	$(\pi,1)$
	$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ חיובי		$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ שלילי		$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ שלילי		$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ חיובי	

$f(x) = 2\cos x - \cos 2x + 4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

פתרון

מינימום קצה $(-\pi, 1)$

מקסימום $\left(-\frac{\pi}{3}, 5.5\right)$

מקסימום $\left(\frac{\pi}{3}, 5.5\right)$

מינימום $(0, 5)$

מינימום קצה $(\pi, 1)$

$f(x) = 2\cos x - \cos 2x + 4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(3) הסבירו מדוע גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה-x בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

פתרון

בתחום השאלה, לפונקציה ערך מינימום אבסולוטי $y = 1$

ומקסימום אבסולוטי עבור $y = 5.5$

כלומר, בתחום השאלה הפונקציה חסומה בין הערכים

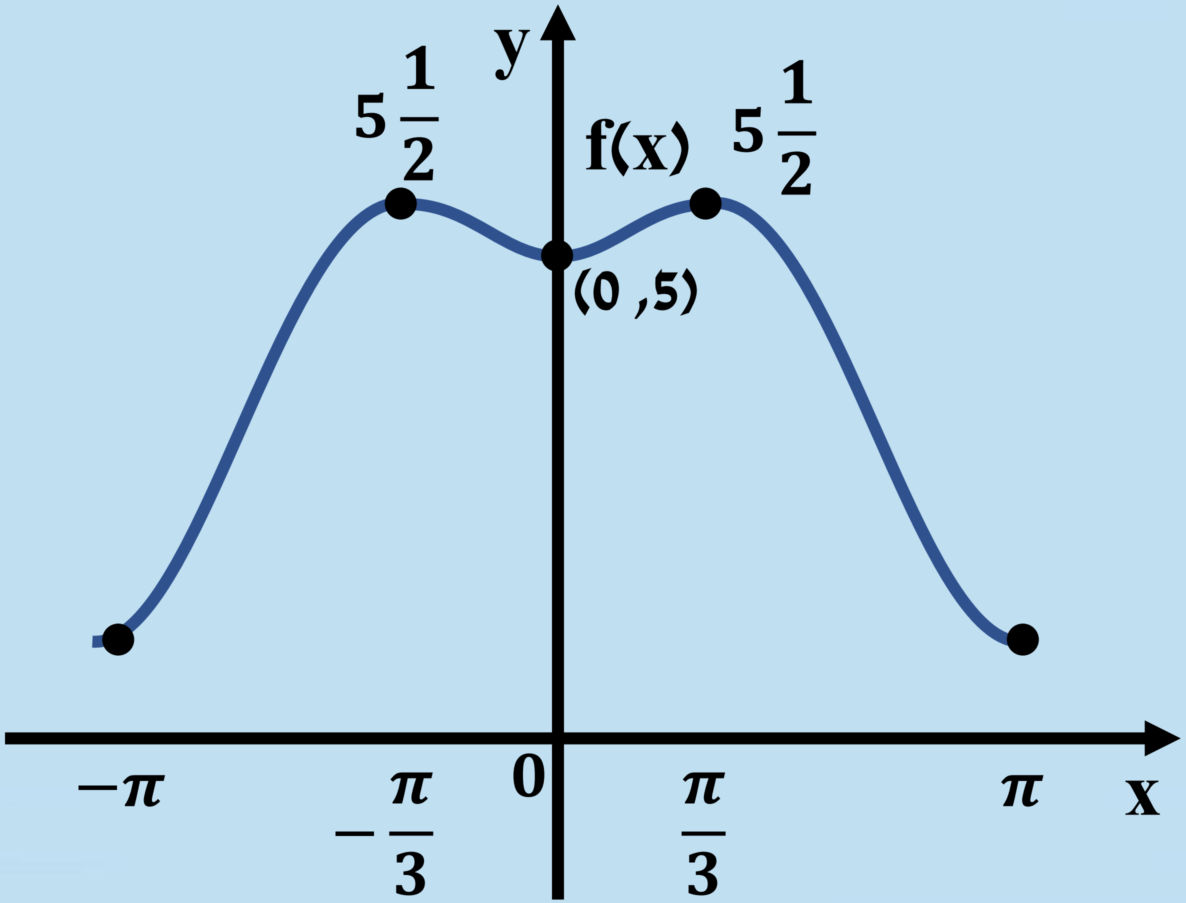
$$1 \le f(x) \le 5.5$$

ומכאן **שאינה חותכת את ציר ה- x**

$f(x) = 2\cos x - \cos 2x + 4$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

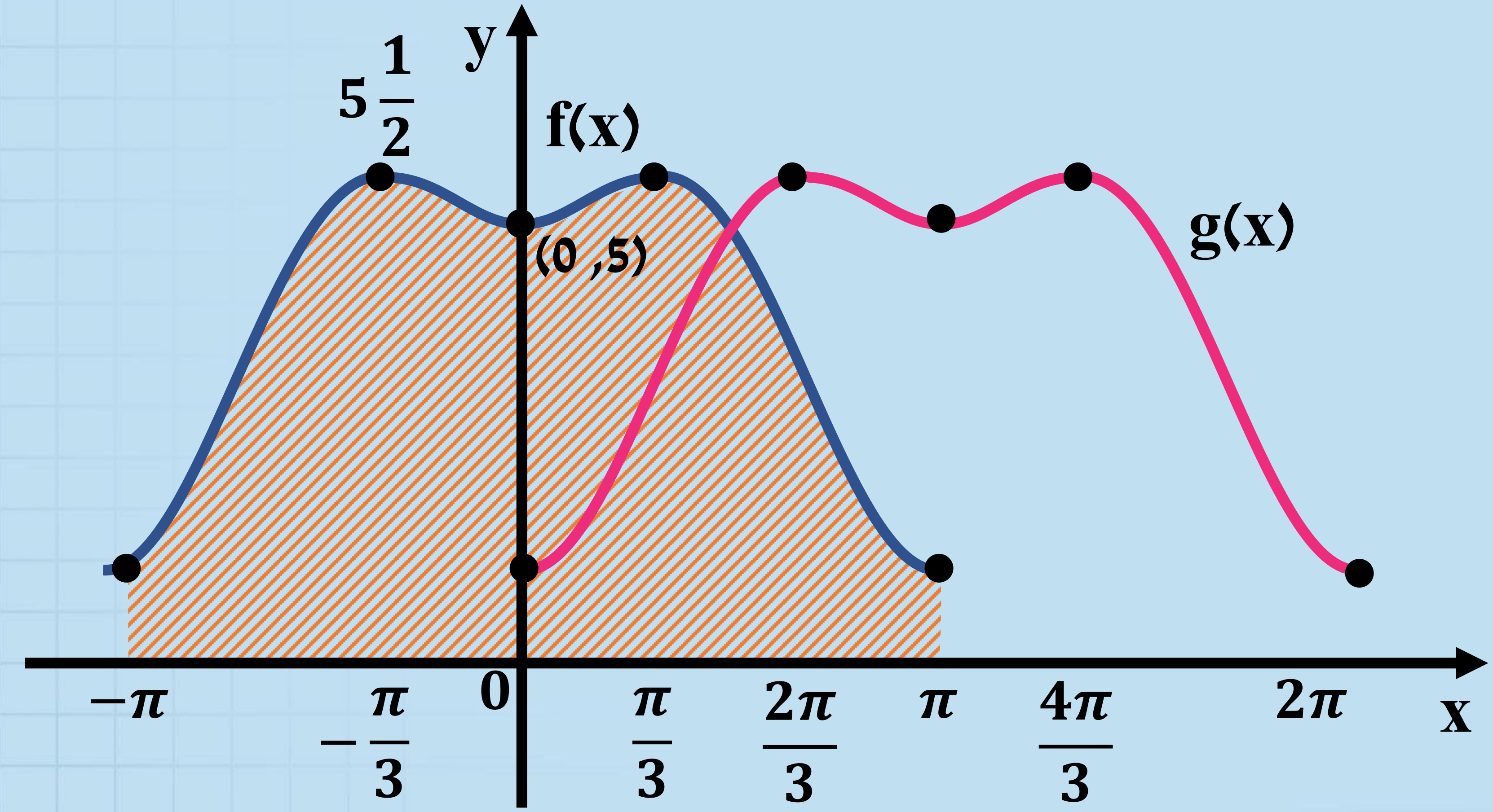
פתרון



ג. גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז ימינה ב- π כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

(1) הוסיפו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים של הפונקציה $f(x)$.

פתרון



ג. גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז ימינה ב- π כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$.
(2) בטאו את הפונקציה $g(x)$ בעזרת x. פשטו ככל האפשר.

פתרון

הפונקציה מתארת הזזה אופקית ימינה ב- π:

$$g(x) = f(x - \pi)$$

$$g(x) = \underbrace{2\cos(x - \pi)} - \underbrace{2\cos[2(x - \pi)]} + 4$$

$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha - \pi)$$

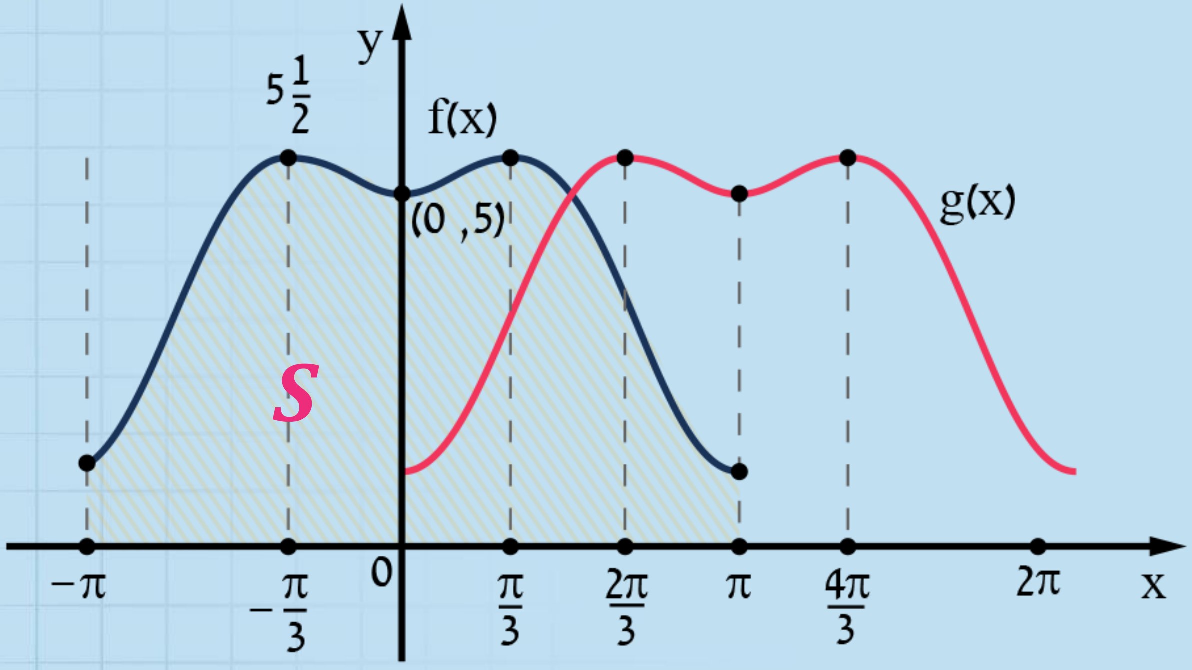
$$\cos(2x - 2\pi) = \cos(2x)$$

$$\boxed{g(x) = -2\cos x - 2\cos 2x + 4}$$

ד. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה f, הצירים והישר $x = -\pi$.

הביעו בעזרת S את $\int_0^{2\pi} g(x)dx$. נמקו את תשובתכם.

פתרון



הפונקציה $f(x)$ זוגית

ומציגה סימטריה ביחס לציר y

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = S$$

ד. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה f, הצירים והישר $x = -\pi$.

הביעו בעזרת S את $\int_0^{2\pi} g(x)dx$. נמקו את תשובתכם.

פתרון

הפונקציה $g(x)$ הזזה אופקית ימינה ב- π של הפונקציה $f(x)$

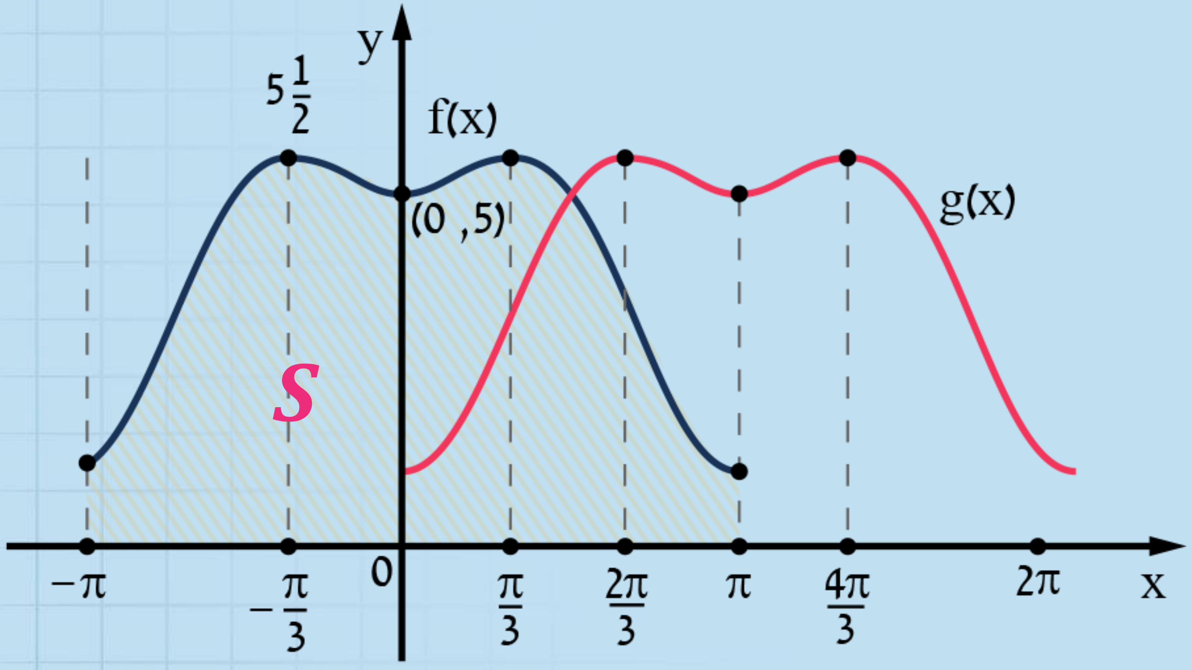
השטח שהפונקציה $f(x)$ יוצרת בתחום $-\pi \le x \le \pi$

זהה לשטח שהפונקציה $g(x)$ יוצרת בתחום $0 \le x \le 2\pi$

ד. נסמן ב-S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה f, הצירים והישר $x = -\pi$.

הביעו בעזרת S את $\int_0^{2\pi} g(x)dx$. נמקו את תשובתכם.

פתרון



$$\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = 2\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx = 2S$$

ה. היעזרו בתשובתכם לסעיף א', מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x) = \sqrt{2\cos x - \cos 2x + 4}$ וקבעו את סוגן.

פתרון

עפ"י סעיף א', לשתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $h(x)$ אותם שיעורי x עבור נקודות הקיצון ונקודות הקיצון מאותו סוג

נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$

$(\pi, 1)$	$\left(\frac{\pi}{3}, 5.5\right)$	$(0,5)$	$\left(-\frac{\pi}{3}, 5.5\right)$	$(-\pi, 1)$
מינימום קצה	מקסימום	מינימום	מקסימום	מינימום קצה

ה. היעזרו בתשובתכם לסעיף א', מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)=\sqrt{2\cos x-\cos 2x+4}$ וקבעו את סוגן.

פתרון

נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$

- $\left(\pi,\sqrt{1}\right)$ מינימום קצה
- $\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{5.5}\right)$ מקסימום
- $\left(0,\sqrt{5}\right)$ מינימום
- $\left(-\frac{\pi}{3},\sqrt{5.5}\right)$ מקסימום
- $\left(-\pi,\sqrt{1}\right)$ מינימום קצה

בהצלחה