פתרון תרגיל

זיהוי הפונקציה על פי הגרף– פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 264, ת. 2

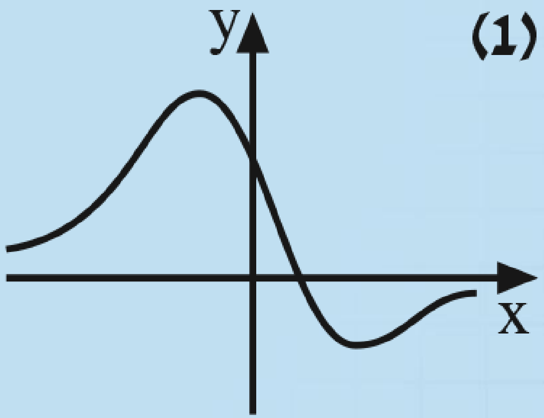
המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

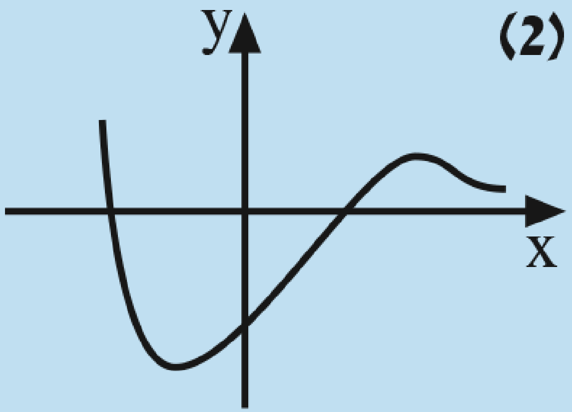
2) שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הפונקציות הבאות:

א) $f(x) = (x^2+3)e^{-\frac{1}{2}x}$ **ב)** $g(x) = (1-2x)e^{-x^2}$ **ג)** $h(x) = (x^2-2)e^{-2x}$

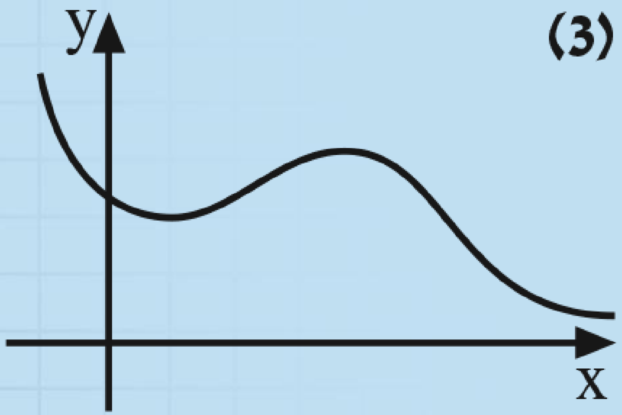
(1)



(2)



(3)



השאלה

א. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-x (אם יש כאלה).

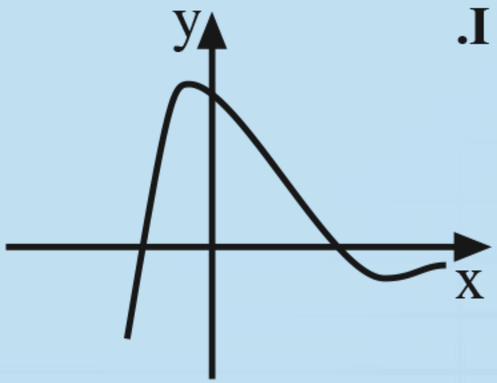
ב. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה. נמק.

ג. מצא לגבי כל גרף את נקודת החיתוך עם ציר ה-y של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

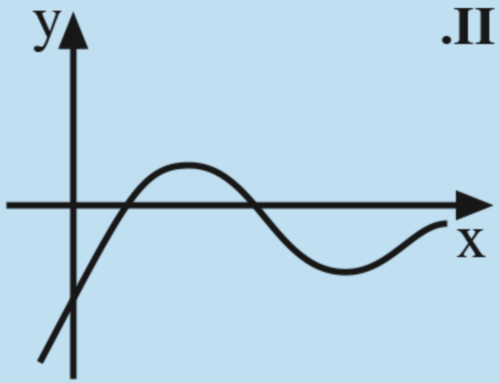
ד. מצא לגבי כל גרף את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

ה. שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הנגזרות של הפונקציות הנ"ל.
קבע איזה גרף מתאר כל נגזרת (נמק):

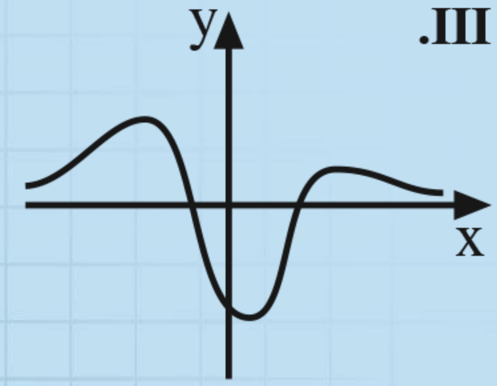
.I



.II



.III



א. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-x (אם יש כאלה).

פתרון

סעיף א':

א) $f(x) = (x^2+3)e^{-\frac{1}{2}x}$

הביטוי שבסוגריים תמיד חיובי, וכך גם הביטוי המעריכי.

לכן הפונקציה הנ"ל לא חותכת את ציר ה-x.

א. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-x (אם יש כאלה).

פתרון

$$g(x) = (1-2x)e^{-x^2}$$

$$(1-2x)e^{-\frac{1}{2}x} = 0$$

$$1-2x = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

לכן, נקודת החיתוך עם ציר ה-x היא: $\left(\frac{1}{2},0\right)$

א. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- x (אם יש כאלה).

פתרון

$$h(x) = (x^2 - 2)e^{-2x}$$

$$(x^2 - 2)e^{-2x} = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x = -\sqrt{2}\,, \qquad x = \sqrt{2}$$

לכן נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן: $(-\sqrt{2},0)$ ו- $(\sqrt{2},0)$.

ב. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה. נמק.

פתרון

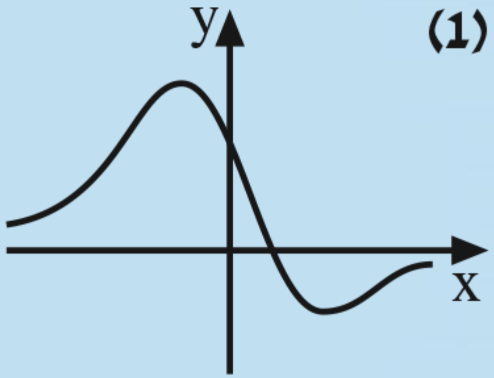
<u>סעיף ב':</u>

א) $f(x)=(x^2+3)e^{-\frac{1}{2}x}$

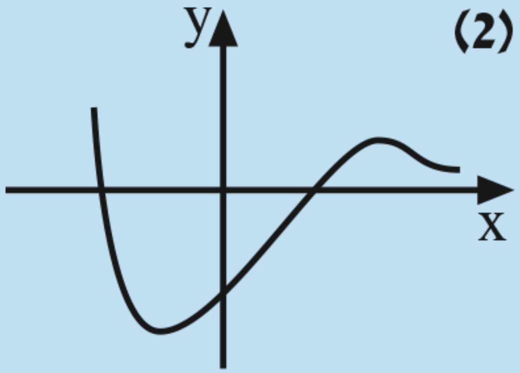
ב) $g(x)=(1-2x)e^{-x^2}$

ג) $h(x)=(x^2-2)e^{-2x}$

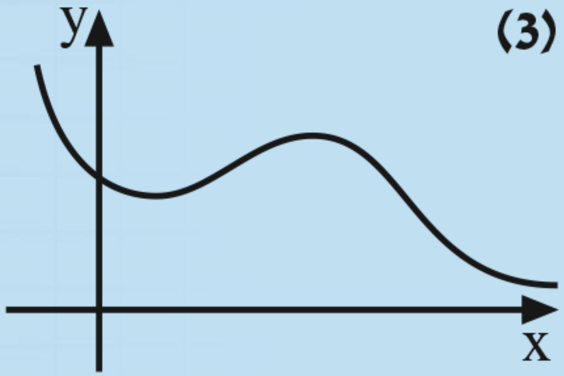
(1)



(2)



(3)



גרף (1) חותך את ציר ה-x בנקודה אחת. לכן הוא מתאים לפונקציה $g(x)$

גרף (2) חותך את ציר ה-x בשתי נקודות. לכן הוא מתאים לפונקציה $h(x)$

גרף (3) לא חותך את ציר ה-x בכלל. לכן הוא מתאים לפונקציה $f(x)$

ג. מצא לגבי כל גרף את נקודת החיתוך עם ציר ה-y של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

פתרון

סעיף ג':

גרף 1- הפונקציה $g(x)$ $g(x)=(1-2x)e^{-x^2}$

$$g(0)=(1-2\cdot 0)e^{0}=1$$

לכן, נקודת החיתוך עם ציר ה-y היא $(0,1)$

גרף 2- הפונקציה $h(x)$ $h(x)=(x^2-2)e^{-2x}$

$$h(0)=(0^2-2)e^{0}=-2$$

לכן, נקודת החיתוך עם ציר ה-y היא $(0,-2)$

ג. מצא לגבי כל גרף את נקודת החיתוך עם ציר ה-y של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

פתרון

גרף 3- הפונקציה $f(x)$ $f(x) = (x^2+3)e^{-\frac{1}{2}x}$

$$f(0) = (0+3)e^0 = 3$$

לכן, נקודת החיתוך עם ציר ה-y היא $(0,3)$

ד. מצא לגבי כל גרף את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

פתרון

סעיף ד':

א) $$f(x)=(x^2+3)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=2xe^{-\frac{1}{2}x}+(x^2+3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$$

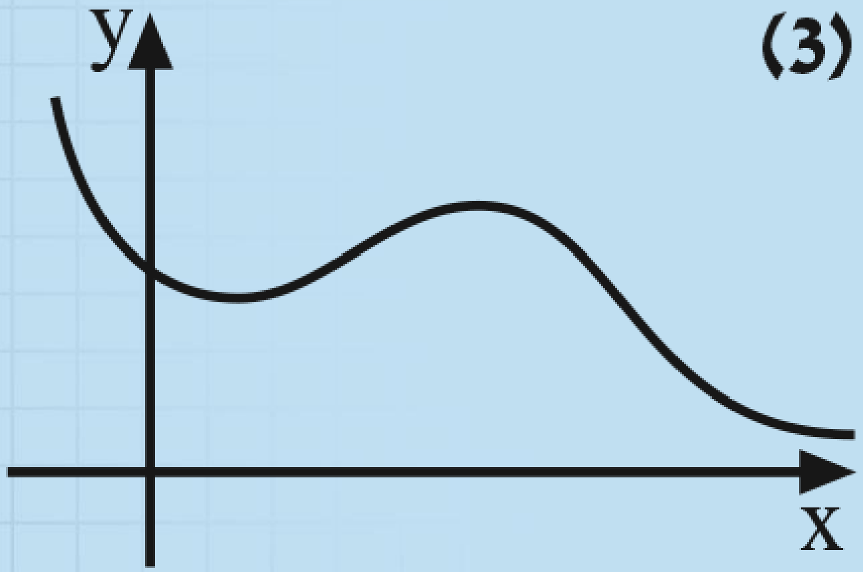
$$f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(2x-\frac{1}{2}(x^2+3)\right)$$

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(2x-\frac{1}{2}(x^2+3)\right)=0$$

ד. מצא לגבי כל גרף את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

פתרון

(3)



$$2x - \frac{1}{2}(x^2 + 3) = 0$$

$$4x - x^2 - 3 = 0$$

$$x_1 = 1 \ , \qquad x_2 = 3$$

$x = 1$ מינימום

$x = 3$ מקסימום

ד.   מצא לגבי כל גרף את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

פתרון

$$g(x) = (1 - 2x)e^{-x^2}$$

$$g'(x) = -2e^{-x^2} + (1 - 2x) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}$$

$$g'(x) = e^{-x^2}[-2 - 2x(1 - 2x)]$$

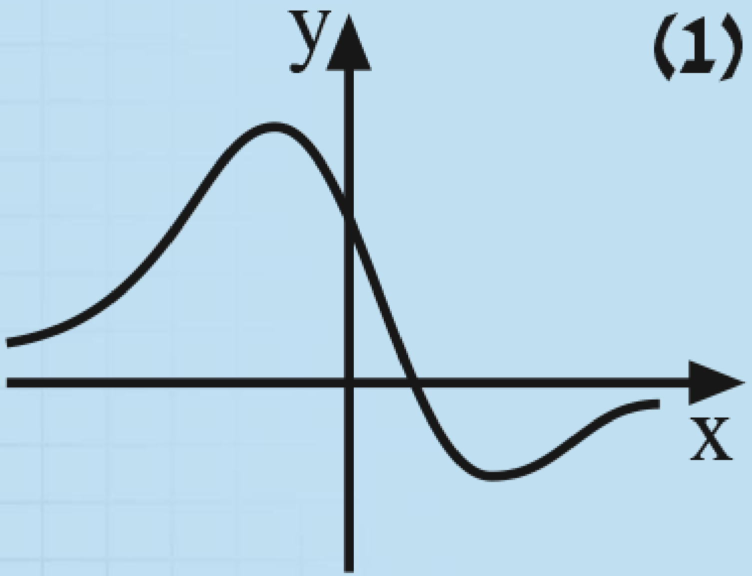
$$e^{-x^2}[-2 - 2x(1 - 2x)] = 0$$

$$-2 - 2x + 4x^2 = 0$$

ד. מצא לגבי כל גרף את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

פתרון

(1)



$$x_1 = 1 \ , \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$$

מקסימום $x = -\frac{1}{2}$

מינימום $x = 1$

ד. מצא לגבי כל גרף את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

פתרון

$$h(x) = (x^2 - 2)e^{-2x}$$

$$h'(x) = 2xe^{-2x} + (x^2 - 2)(-2e^{-2x})$$

$$h'(x) = 2e^{-2x}[x - 1(x^2 - 2)]$$

$$h'(x) = 2e^{-2x}[x - x^2 + 2]$$

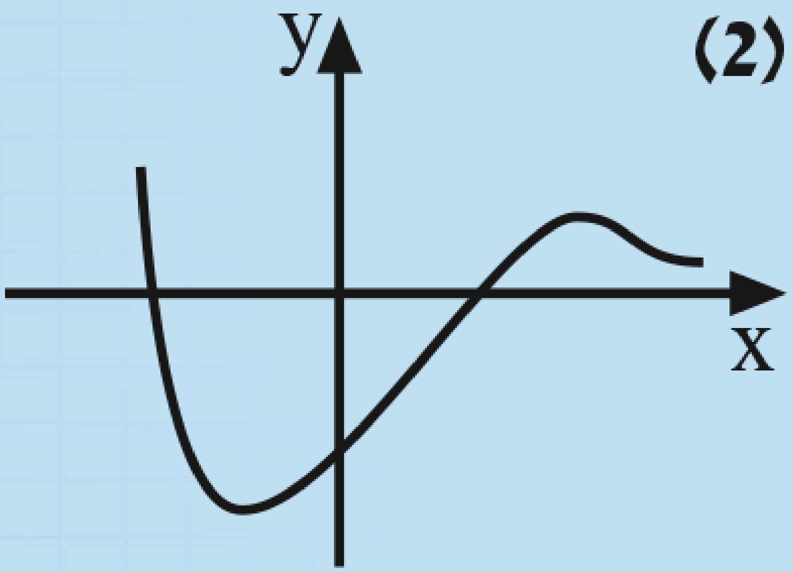
$$2e^{-2x}[x - x^2 + 2] = 0$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

ד. מצא לגבי כל גרף את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה שאותה הוא מתאר.

פתרון

(2)



$x_1 = -1$, $x_2 = 2$

$x = -1$ מינימום

$x = 2$ מקסימום

ה. שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הנגזרות של הפונקציות הנ"ל.
קבע איזה גרף מתאר כל נגזרת (נמק):

פתרון

סעיף ה':

לפונקציה $f(x)$ יש מינימום ב-x=1 ומקסימום ב-$x = 3$.

תחומי חיוביות של $f'(x)$: $1 < x < 3$

תחומי שליליות של $f'(x)$: $x > 3$, $x < 1$

לפונקציה $g(x)$ יש מקסימום ב-$x = -\frac{1}{2}$ ומינימום ב-$x = 1$.

ה. שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הנגזרות של הפונקציות הנ"ל.
קבע איזה גרף מתאר כל נגזרת (נמק):

פתרון

תחומי חיוביות של $g'(x)$: $x > 1$, $x < -\frac{1}{2}$

תחומי שליליות של $g'(x)$: $-\frac{1}{2} < x < 1$

לפונקציה $h(x)$ יש מינימום ב- $x = -1$ ומקסימום ב- $x = 2$

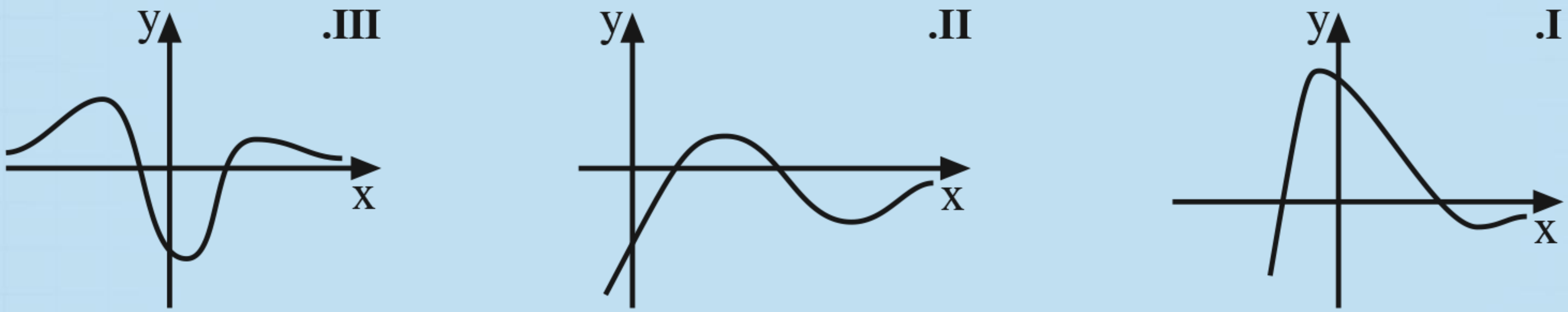
תחומי חיוביות של $h'(x)$: $-1 < x < 2$

תחומי שליליות של $h'(x)$: $x > 2$, $x < -1$

ה. שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הנגזרות של הפונקציות הנ"ל.
קבע איזה גרף מתאר כל נגזרת (נמק):

פתרון

נתבונן בשלושת הגרפים של פונקציות הנגזרת.



רואים שהגרף היחיד שבו הפונקציה היא חיובית, שלילית ואז שוב חיובית הוא גרף מס' 3.

לכן גרף מס' 3 חייב להתאים לפונקציה $g'(x)$.

ה. שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הנגזרות של הפונקציות הנ"ל.
קבע איזה גרף מתאר כל נגזרת (נמק):

פתרון

שני הגרפים האחרים לא שונים זה מזה בתחומי החיוביות והשליליות, אבל הם כן שונים זה מזה בנקודת החיתוך עם ציר ה-y.

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(2x - \frac{1}{2}(x^2+3)\right)$$

$$f'(0) = e^0(0-1.5) = -1.5$$

$$h'(x) = 2e^{-2x}[x - x^2 + 2]$$

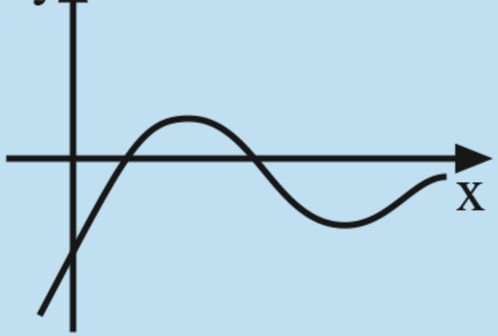
$$h'(0) = 2e^0(0+2) = 4$$

ה. שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הנגזרות של הפונקציות הנ"ל.
קבע איזה גרף מתאר כל נגזרת (נמק):

פתרון

.I

.II



הפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה $(0, -1.5)$

הפונקציה $h'(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה $(0,4)$

לכן גרף מס' 2 מתאים ל- $f'(x)$, וגרף מס' 1 מתאים ל-$h'(x)$.

בהצלחה