פתרון תרגיל

תרגילים לחזרה–חקירת פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 260, ת. 17

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

17) לפונקציה $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x^k}$ יש קיצון בנקודה שבה $x=1$.

א. מצא את k.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודות המינימום של הפונקציה. (עליך להראות שמתקבל בהן מינימום).

ד. מהי האסימפטוטה האנכית של הפונקציה?

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. סעיף זה מתייחס לפונקציית **הנגזרת** $f'(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה-x.

(3) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$.

(4) ידוע שלפונקציה $f'(x)$ אין נקודות קיצון. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

א. מצא את k.

פתרון

<u>סעיף א':</u>

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^k}$$

נתון כי: $f'(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2} \cdot x^k - e^{x^2} \cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2}$$

$$0 = \frac{2e^1 \cdot 1^k - e^1 \cdot k \cdot 1^{k-1}}{(1^k)^2}$$

א. מצא את k.

פתרון

$$0 = \frac{2e^1 \cdot 1^k - e^1 \cdot k \cdot 1^{k-1}}{(1^k)^2}$$

$$2e - ek = 0$$

$$ek = 2e$$

$$\boldsymbol{k = 2}$$

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

$$\mathrm{k} = 2 \;\rightarrow f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^k}$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

תחום ההגדרה הוא: $\boldsymbol{x \neq 0}$

ג. מצא את נקודות המינימום של הפונקציה.
(עליך להראות שמתקבל בהן מינימום).

פתרון

<u>סעיף ג':</u>

$$k=2 \rightarrow f'(x)=\frac{2xe^{x^2}\cdot x^k-e^{x^2}\cdot kx^{k-1}}{(x^k)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2xe^{x^2}\cdot x^2-e^{x^2}\cdot 2x}{(x^k)^2}$$

$$\frac{2xe^{x^2}\cdot x^2-e^{x^2}\cdot 2x}{(x^k)^2}=0$$

ג. מצא את נקודות המינימום של הפונקציה.
(עליך להראות שמתקבל בהן מינימום).

פתרון

$$2xe^{x^2} \cdot x^2 - e^{x^2} \cdot 2x = 0$$

$$2e^{x^2}(x^3 - x) = 0$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

מקבלים שלושה פתרונות: $\cancel{x_1 = 0}\,,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

נפסל, כי הפונקציה לא מוגדרת כאשר $x = 0$

ג. מצא את נקודות המינימום של הפונקציה.
(עליך להראות שמתקבל בהן מינימום).

פתרון

$f'(x)$ היא פונקציית מנה. לכן, מספיק למצוא את הסימן של נגזרת המונה בנקודות הקיצון.

$$f'(x)\text{המונה של} = 2e^{x^2}(x^3 - x)$$

$$f''(x) = 2 \cdot 2xe^{x^2}(x^3 - x) + 2e^{x^2} \cdot (3x^2 - 1) \text{ רק מונה}$$

$$f''(1) = 0 + 2e^1(3 - 1) =+\cdot 2 > 0 \rightarrow \text{מינימום}$$

$$f''(-1) = 0 + 2e^1(3 - 1) =+\cdot 2 > 0 \rightarrow \text{מינימום}$$

ג. מצא את נקודות המינימום של הפונקציה.
(עליך להראות שמתקבל בהן מינימום).

פתרון

$$f(x)=\frac{e^{x^2}}{x^2}$$

$$f(1)=\frac{e^{1^2}}{1^2}=e$$

$$f(-1)=\frac{e^{(-1)^2}}{(-1)^2}=e$$

לסיכום:

נקודות המינימום של הפונקציה הן:

$(1,e)$ ו- $(-1,e)$

ד. מהי האסימפטוטה האנכית של הפונקציה?

פתרון

סעיף ד':

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$$

המכנה מתאפס כאשר $x = 0$.

בנוסף, $x = 0$ **לא** מאפס את המונה.

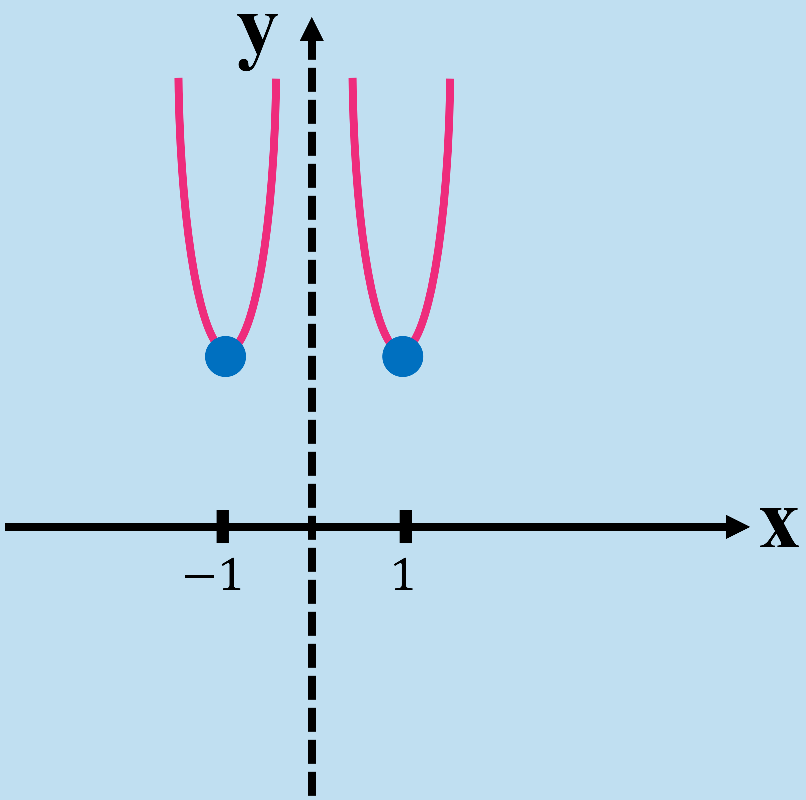
לכן, הישר $x = 0$ הוא האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

סעיף ה':

$$f(x)=\frac{e^{x^2}}{x^2}$$



ו. סעיף זה מתייחס לפונקציית **הנגזרת** $f'(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.

פתרון

סעיף ה':

$$f'(x)=\frac{2xe^{x^2}\cdot x^2-e^{x^2}\cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3e^{x^2}-e^{x^2}\cdot 2x}{x^4}$$

(1) **תחום ההגדרה של** $f'(x)$ הוא: $x\neq 0$

ו. סעיף זה מתייחס לפונקציית **הנגזרת** f′(x).
(2) מצא את נקודות החיתוך של f′(x) עם ציר ה-x.

פתרון

$$f'(x) = \frac{2x^3e^{x^2} - e^{x^2} \cdot 2x}{x^4}$$

(2) נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן הנקודות שבהן $f'(x) = 0$.

מצאנו כבר בסעיף ג' שהפתרונות הם: $x_1 = 0 \,,\; x_2 = 1,\; x_3 = -1$

גם כאן, הפתרון $x = 0$ נפסל, כי $f'(x)$ **לא מוגדרת** כאשר $x = 0$.

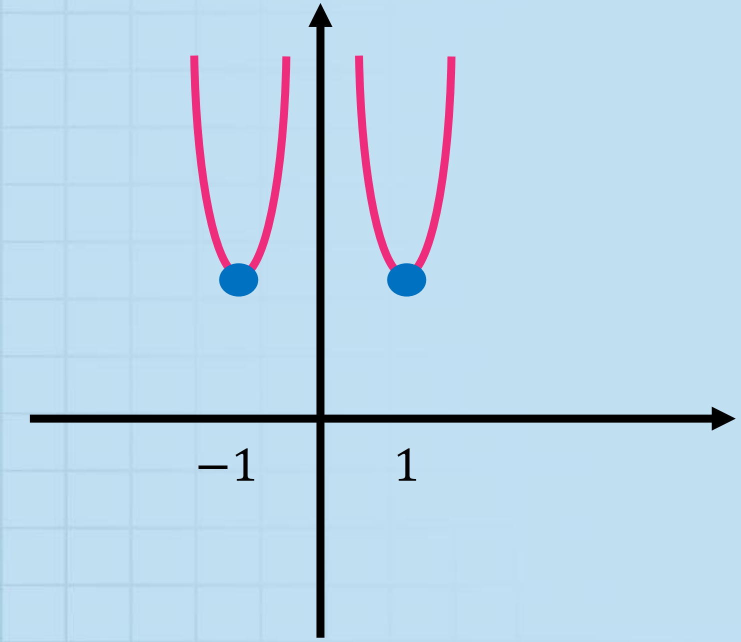
לכן, נקודות החיתוך עם ציר ה-x הן: **(1,0)** ו- **(−1,0)**.

ו. סעיף זה מתייחס לפונקציית **הנגזרת** $f'(x)$.

(3) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$.

פתרון

(3) נקבע את תחומי החיוביות והשליליות של $f'(x)$ על פי **תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.**



על-פי הסקיצה של $f(x)$, **ידוע לנו כי**:

$f(x)$ עולה כאשר: $-1 < x < 0$, $x > 1$

$f(x)$ יורדת כאשר: $0 < x < 1$, $x < -1$

$f'(x)$ **חיובית** כאשר: $-1 < x < 0$, $x > 1$

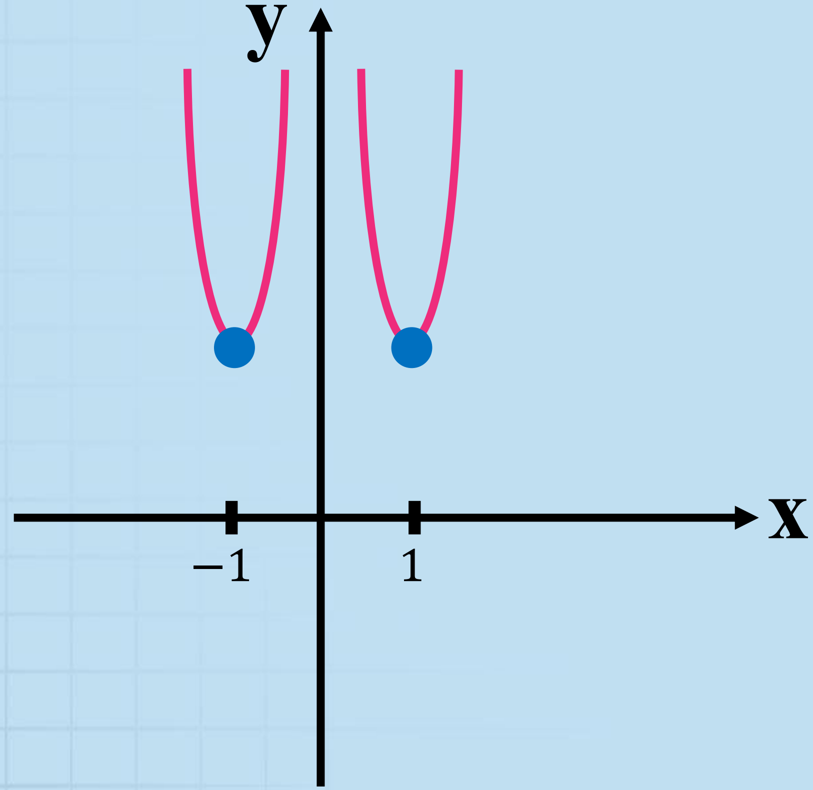
$f'(x)$ **שלילית** כאשר: $0 < x < 1$, $x < -1$

ו. סעיף זה מתייחס לפונקציית **הנגזרת** $f'(x)$.
(4) ידוע שלפונקציה $f'(x)$ אין נקודות קיצון. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

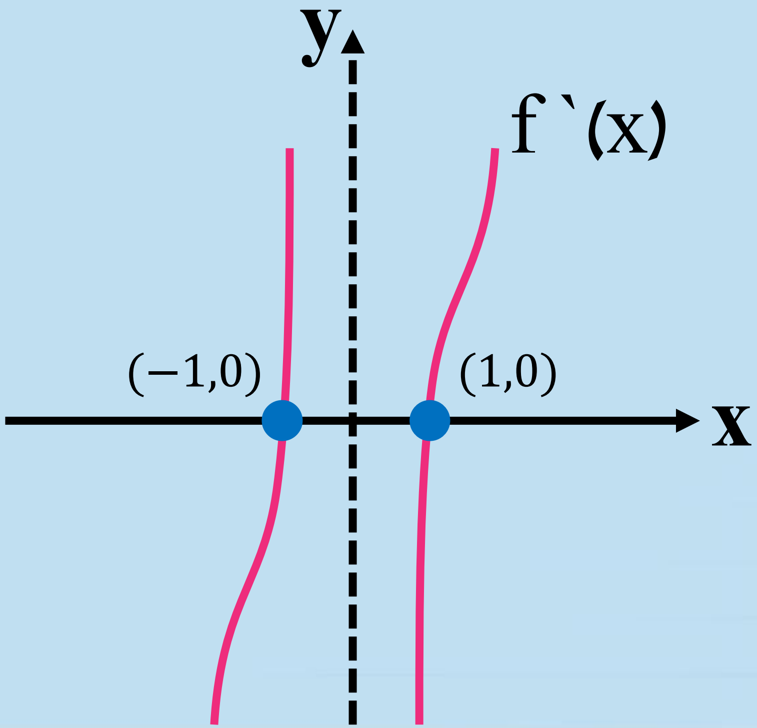
פתרון

סעיף ה':

$$f(x)=\frac{e^{x^2}}{x^2}$$



$$f'(x)=\frac{2xe^{x^2}(x^2-1)}{x^4}$$



בהצלחה