פתרון תרגיל

חקירת פונקציה–
פונקציות מעריכיות
מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 248, ת. 37

השאלה

37) לפונקציה $f(x) = (x^2+a)e^{-x}$ יש נקודת קיצון ב-$x = -1$.

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $\mathbf{g'(x) = f(x)}$ לכל x.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

(3) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 0$ שעל גרף הפונקציה $g(x)$.

א. מצא את a.

סעיף א':

פתרון

$$f(x) = (x^2 + a)e^{-x}$$

נתון: $f'(-1) = 0$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (x^2 + a) \cdot (-e^{-x})$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - e^{-x}(x^2 + a)$$

$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2 - a)$$

א. מצא את a.

פתרון

$$e^{-x}(2x-x^2-a)=0$$

$$2x-x^2-a=0$$

$$x=-1\rightarrow 2\cdot(-1)-(-1)^2-a=0$$

$$-2-1-a=0$$

$$\mathbf{a=-3}$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2 - a)$$

$$a = -3 \rightarrow f'(x) = e^{-x}(2x - x^2 + 3)$$

$$e^{-x}(2x - x^2 + 3) = 0$$

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x_1 = -1 \,, \qquad x_2 = 3$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2 + 3)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2 + 3) + e^{-x}(2 - 2x)$$

$$f''(-1) = 0 + e^{1}(2 + 2) > 0 \longrightarrow$$ **מינימום**

$$f''(3) = 0 + e^{-3}(2 - 2 \cdot 3) < 0 \longrightarrow$$ **מקסימום**

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$f(x) = (x^2 + a)e^{-x}$$

$$a = -3 \rightarrow f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f(-1) = \left((-1)^2 - 3\right)e^1 = -2e$$

$$f(3) = (3^2 - 3)e^{-3} = \frac{6}{e^3}$$

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

לסיכום:

מינימום $\left(-1,-2e\right)$

מקסימום $\left(3,\frac{6}{e^3}\right)$

סעיף ג':

עלייה: $-1<x<3$

ירידה: $x<-1\,,\;\; x>3$

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון

<u>סעיף ד':</u>

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

<u>חיתוך עם ה-y:</u>

$$x = 0 \rightarrow f(0) = (0 - 3)e^0 = -3$$

$$(0, -3)$$

<u>חיתוך עם ה-x:</u>

$$(x^2 - 3)e^{-x} = 0$$

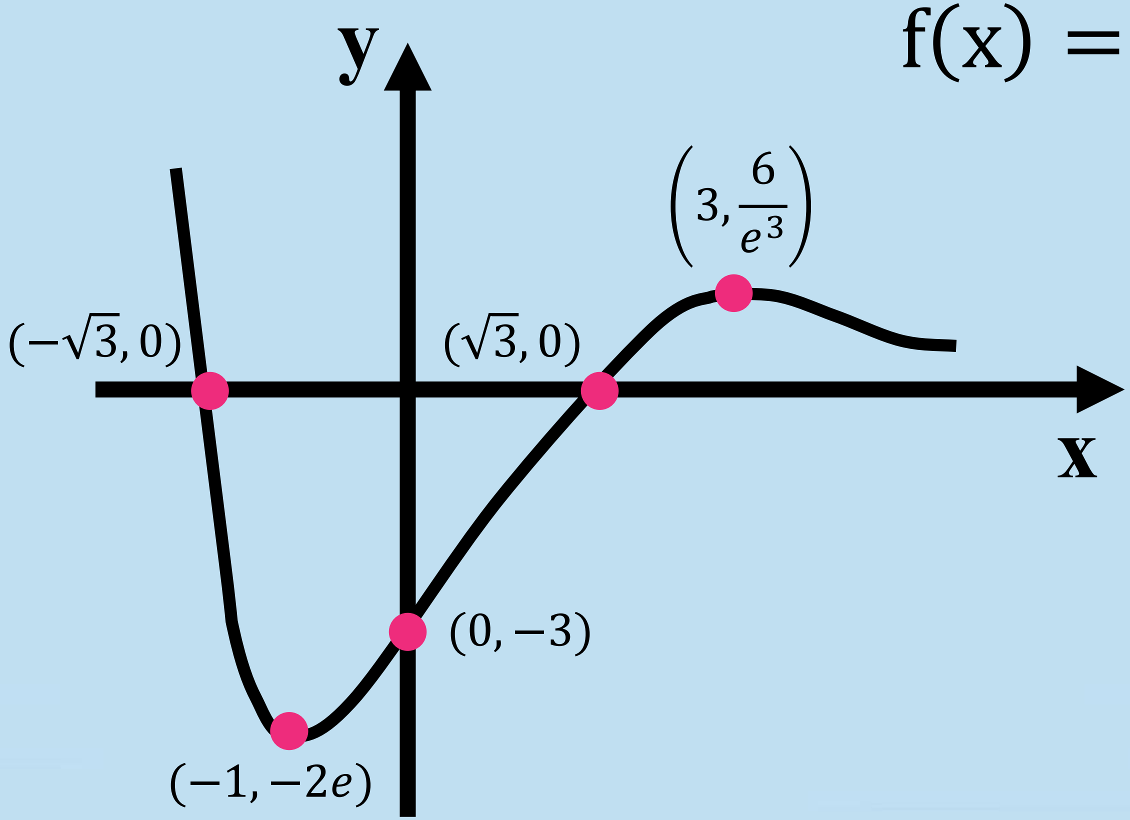
$$(-\sqrt{3}, 0)\ (\sqrt{3}, 0) \longleftarrow x = \pm\sqrt{3} \leftarrow x^2 = 3 \leftarrow x^2 - 3 = 0$$

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

סעיף ה':

$$f(x) = (x^2 - 3)\, e^{-x}$$



ו. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ לכל x.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון

סעיף ו':

$$g'(x) = f(x)$$

1) $$g'(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$(x^2 - 3)e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x = -\sqrt{3}, \qquad x = \sqrt{3}$$

ו. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $\mathbf{g'(x) = f(x)}$ לכל x.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון

$$g'(x) = f(x) \rightarrow g''(x) = f'(x)$$

$$g''(x) = e^{-x}(2x - x^2 + 3)$$

$$g''(-\sqrt{3}) = + \cdot \left(-2\sqrt{3} - 3 + 3\right) < 0 \rightarrow \text{מקסימום}$$

$$g''(\sqrt{3}) = + \cdot \left(2\sqrt{3} - 3 + 3\right) > 0 \rightarrow \text{מינימום}$$

ו. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ לכל x.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

(3) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 0$

פתרון

2) תחומי העלייה והירידה:

עלייה: $x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$

ירידה: $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

3) יש למצוא את: $g'(0)$

$$g'(x) = f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$g'(0) = f(0) = (0 - 3) \cdot e^0 = -3$$

בהצלחה