פתרון תרגיל

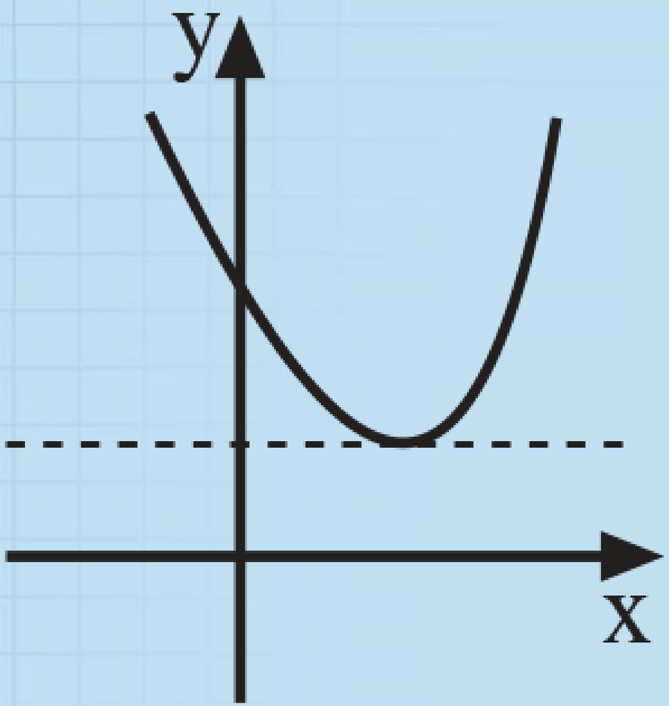
חקירת פונקציה– פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 245, ת. 3

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה



3) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = e^x - ex + 1$.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

ד. הסבר מדוע לכל x מתקיים אי השוויון $e^x \geq ex$.

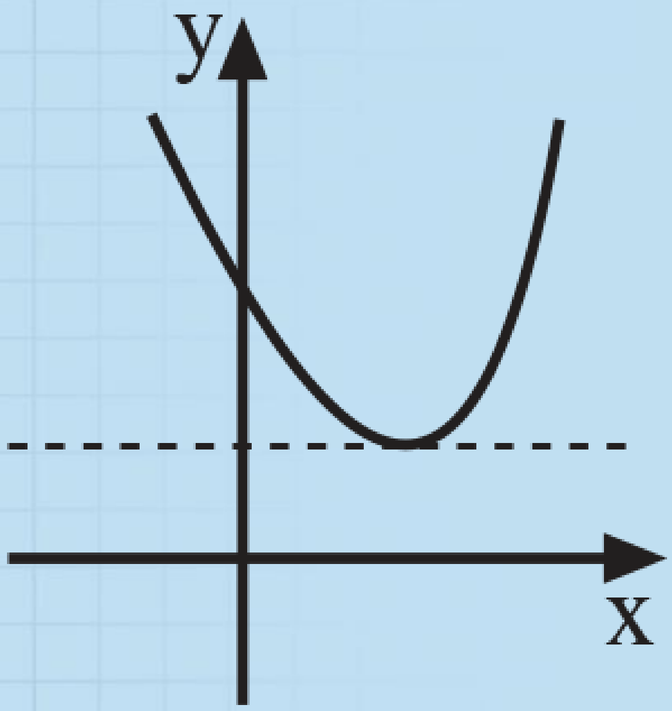
ה. הישר המקווקו שבציור מקביל לציר ה-x ומשיק לגרף הפונקציה. מצא את משוואתו.

ו. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = 2f(x) - 3$. מצא את נקודת הקיצון של $g(x)$.

ז. $h(x)$ היא פונקציה שמקיימת $h'(x) = f(x)$ לכל x. הסבר מדוע לפונקציה $h(x)$ אין נקודות קיצון והיא עולה לכל x.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון



$$f(x) = e^x - ex + 1$$

א) **<u>מציאת נקודת הקיצון</u>** :

$$f'(x) = e^x - e$$

$$e^x - e = 0$$

$$e^x = e$$

$$x = 1$$

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$f''(x) = e^x$$

$$f''(1) = e^1 > 0$$

לכן מדובר בנקודת מינימום.

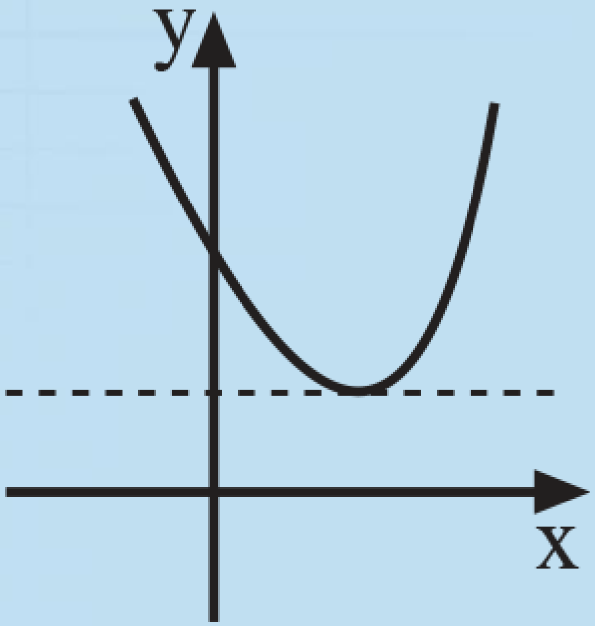
$$f(x) = e^x - ex + 1$$

$$f(1) = e^1 - e + 1 = 1$$

לסיכום: $(1,1)$ **מינימום**.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון



<u>ב) תחומי עלייה וירידה</u>

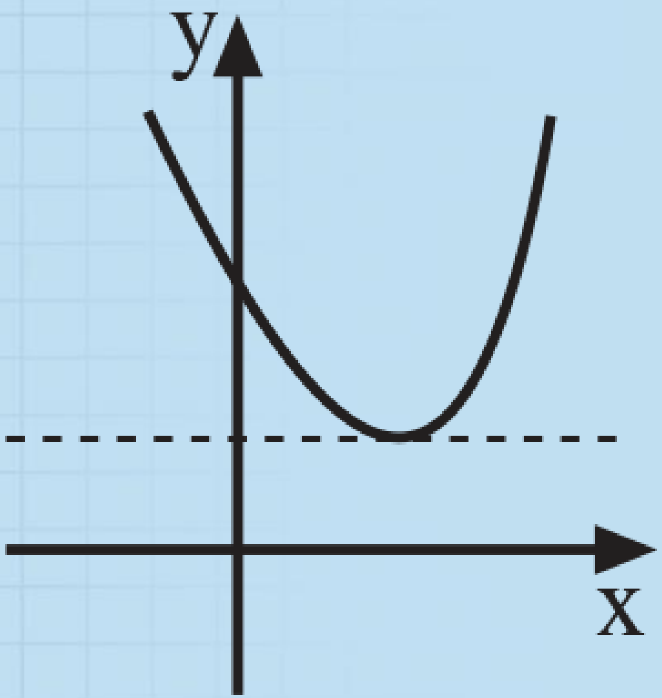
הפונקציה **יורדת** עד לנקודת המינימום, **ועולה** החל מנקודת המינימום. לכן:

$x < 1$ יורדת

$x > 1$ עולה

ג.   מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y.

פתרון



__ג) חיתוך עם ציר ה-y:__

$$f(x) = e^x - ex + 1$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 - e \cdot 0 + 1 = 2$$

לכן, נקודת החיתוך היא: **(0,2)**

ד. הסבר מדוע לכל x מתקיים אי השוויון $e^x \geq ex$.

פתרון

<u>סעיף ד':</u>

יש להוכיח כי לכל x מתקיים: $e^x \geq ex$

נגדיר את הפונקציה הבאה: $g(x) = e^x - ex$

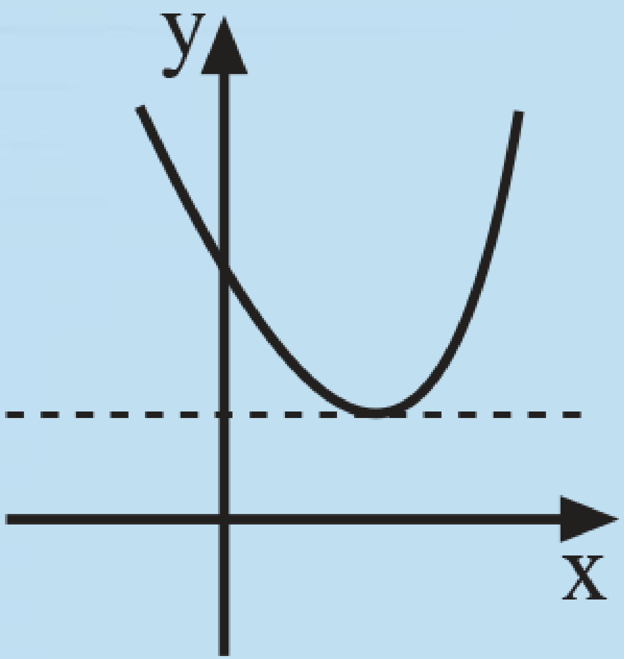
נתבונן בפונקציה המקורית בתרגיל: $f(x) = e^x - ex + 1$

אנו רואים שהפונקציה g מתקבלת מהפונקציה f על-ידי **הזזה** של הגרף של f

ביחידה אחת כלפי מטה.

ד. הסבר מדוע לכל x מתקיים אי השוויון $e^x \geq ex$.

פתרון



הגרף של הפונקציה f נראה כך:

כיוון שהערך המינימלי של $f(x)$ הוא 1, הערך המינימלי של $g(x)$ הוא 0.

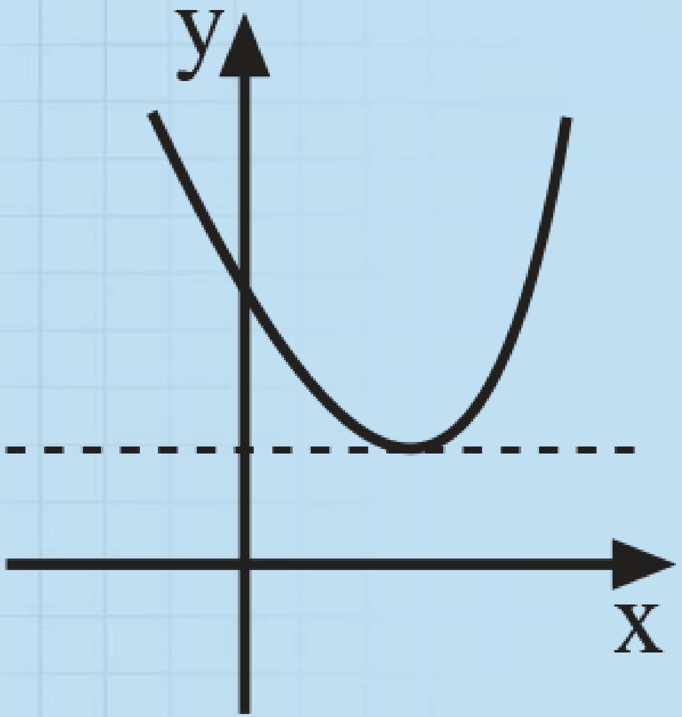
לכן, הוכחנו כי: $g(x) \geq 0$ לכל x. **והרי:** $g(x) = e^x - ex$

כלומר, הוכחנו כי: $e^x - ex \geq 0$ לכל x.

ה. הישר המקווקו שבציור מקביל לציר ה-x ומשיק לגרף הפונקציה. מצא את משוואתו.

פתרון

<u>סעיף ה':</u>



רואים בשרטוט כי נקודת ההשקה היא נקודת המינימום, **כלומר**, $(1,1)$.

נתון כי המשיק **מקביל לציר ה-x.**

לכן, משוואת המשיק היא: $y = 1$.

ו. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x) = 2f(x)-3$. מצא את נקודת הקיצון של $g(x)$.

פתרון

<u>סעיף ו':</u>

$$g(x) = 2f(x) - 3$$

$$g'(x) = 2f'(x)$$

לכן $g'(x)$ מתאפסת כאשר $f'(x)$ מתאפסת.

כלומר, שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ הוא 1.

ו. $g(x)$ היא הפונקציה $g(x)=2f(x)-3$. מצא את נקודת הקיצון של $g(x)$.

פתרון

$$g'(x) = 2f'(x)$$

$$g''(x) = 2f''(x)$$

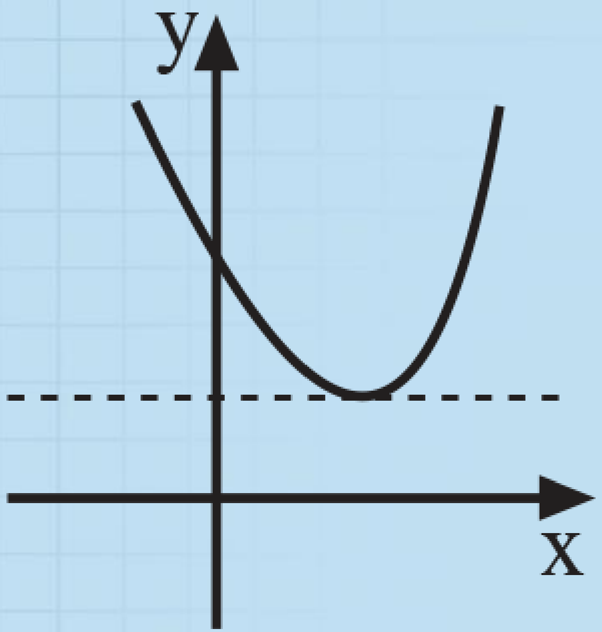
לכן הסימן של $g''(x)$ **זהה** לסימן של $f''(x)$. לפיכך, סוג הקיצון של $g(x)$ הוא מינימום.

$$g(x) = 2f(x) - 3$$

$$g(1) = 2f(1) - 3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

לסיכום: **$(1, -1)$ מינימום.**

ז. $h(x)$ היא פונקציה שמקיימת $h'(x) = f(x)$ לכל x. הסבר מדוע לפונקציה $h(x)$ אין נקודות קיצון והיא עולה לכל x.



פתרון

<u>סעיף ז':</u>

$$h'(x) = f(x)$$

גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו **מעל ציר ה-x**.

כלומר, $f(x)$ **חיובית לכל x**. כלומר, הנגזרת של $h(x)$ **חיובית לכל x**.

לכן, הפונקציה $h(x)$ **עולה** כל x. לכן אין ל-$h(x)$ נקודות קיצון.

בהצלחה