תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה–
פונקציות מעריכיות
מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 242, דוגמה א'

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

תרגיל לדוגמה

<u>חקירת פונקציה – פונקציות מעריכיות</u>

נביא דוגמאות לחקירת פונקציות הכוללות פונקציות מעריכיות.

דוגמא א':

נתונה הפונקציה $f(x) = e^x - x$. חקור את הפונקציה עפ"י הסעיפים הבאים ומצא:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

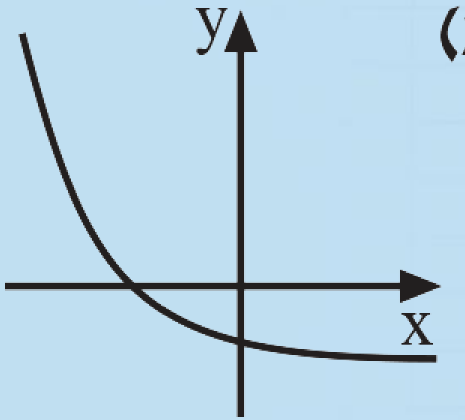
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתונים ארבעה גרפים. איזה גרף מתאר את פונקציית **הנגזרת** $f'(x)$? נמק.

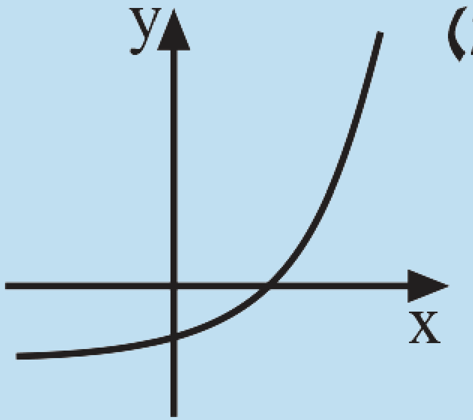
תרגיל לדוגמה

ו. נתונים ארבעה גרפים. איזה גרף מתאר את פונקציית **הנגזרת** $f'(x)$? נמק.

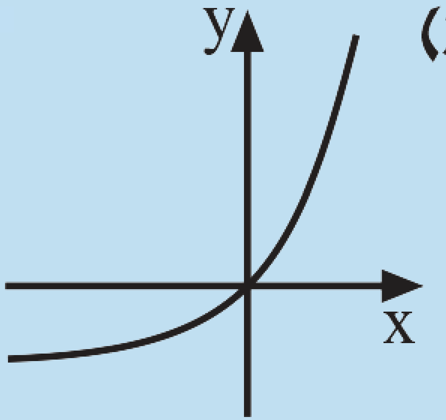
(1)



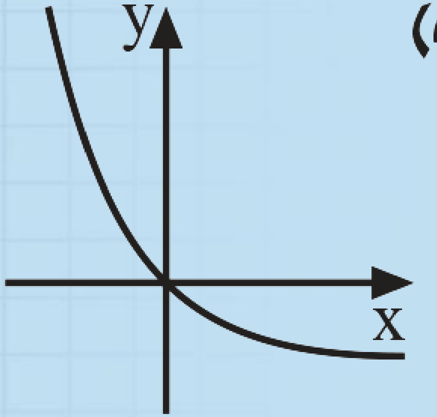
(2)



(3)



(4)



ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $\mathbf{g'(x) = f(x)}$.

(1) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון והיא עולה לכל x.

(2) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

תרגיל לדוגמה

פתרון:

א. **תחום הגדרה** – הפונקציה $f(x) = e^x - x$ מוגדרת לכל x.

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונקבל: $f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1 = 0$, לכן $e^x = 1$ ומכאן $x = 0$. נגזור פעם שנייה $f''(x) = e^x$, לכן $f''(0) = 1 > 0$ וזאת נקודת מינימום. ערך הפונקציה הוא $f(0) = e^0 - 0 = 1$. כלומר הנקודה $(0,1)$ היא נקודת מינימום.

ג. **תחומי עלייה וירידה** – עפ"י נקודת המינימום הפונקציה עולה עבור $x > 0$ ויורדת עבור $x < 0$.

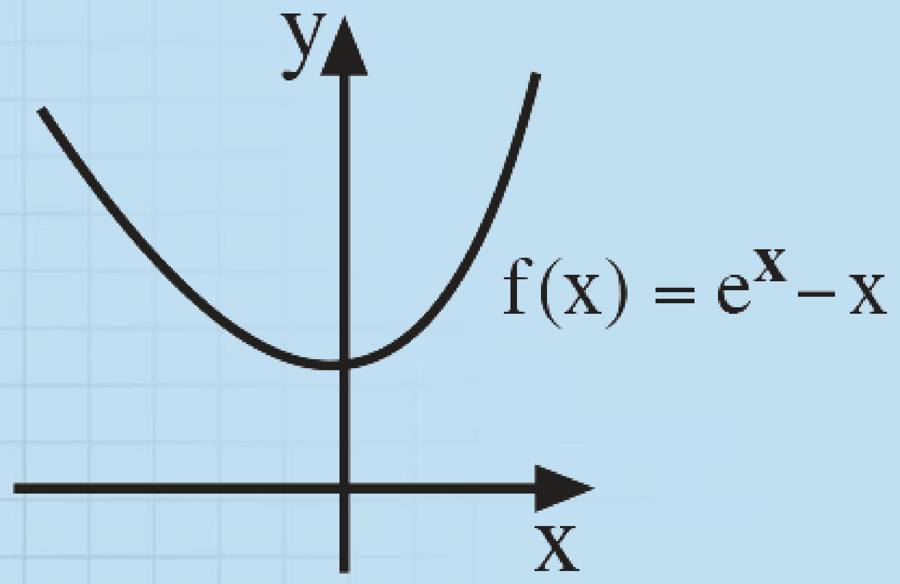
תרגיל לדוגמה

ד. **חיתוך עם הצירים** – חיתוך עם ציר ה-y: ‏$(0,1)$.

חיתוך עם ציר ה-x: הפונקציה **לא** חותכת את ציר ה-x כי ערכה **המינימלי** הוא 1.

ה. **שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה** –

ניתן להיעזר בטבלה. הגרף מופיע משמאל.



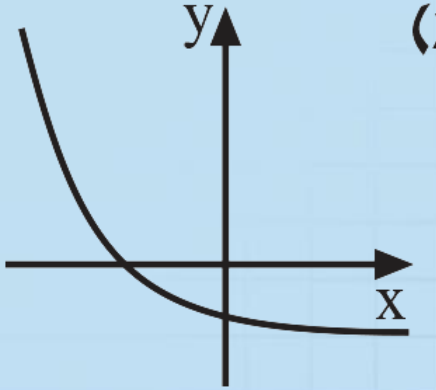
x	$x<0$	0	$x>0$
$f'(x)$	−	0	+
עלייה ירידה	↘	מינימום	↗

תרגיל לדוגמה

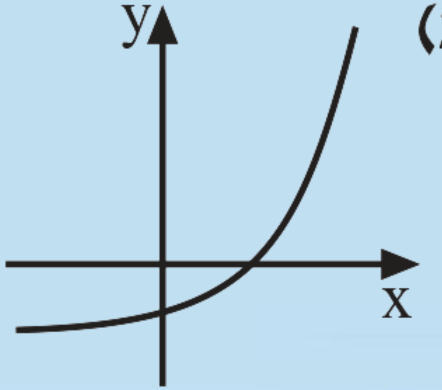
ו. הפונקציה הנגזרת היא $f'(x) = e^x - 1$. ניתן למצוא איזה גרף מתאר את הפונקציה $f'(x)$ בשתי דרכים.

דרך א' – אם נגזור את $f'(x)$ נקבל: $f''(x) = e^x$. עפ"י תוצאה זו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ **חיובית** לכל x ולכן הפונקציה $f'(x)$ **עולה** לכל x. כלומר הגרפים האפשריים הם (2) או (3). קל לראות שהפונקציה $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x בנקודה (0,0) ולכן הגרף המתאים הוא גרף (3).

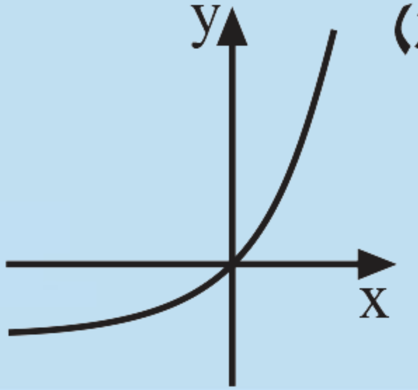
(1)



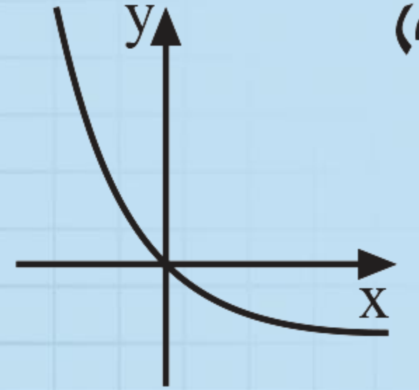
(2)



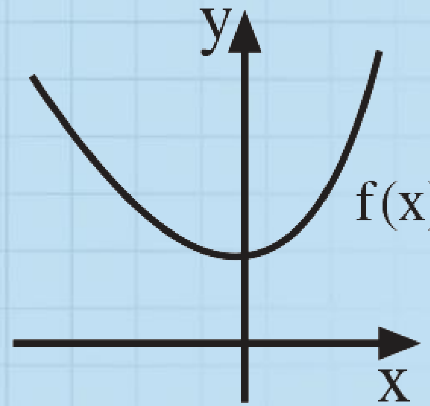
(3)



(4)

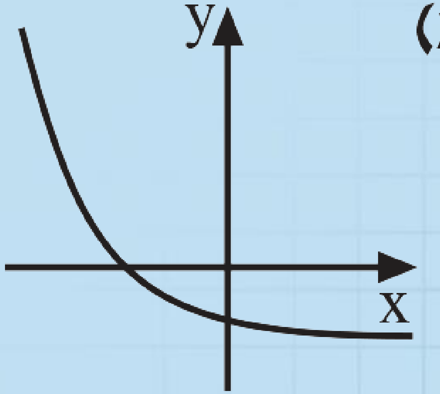


תרגיל לדוגמה

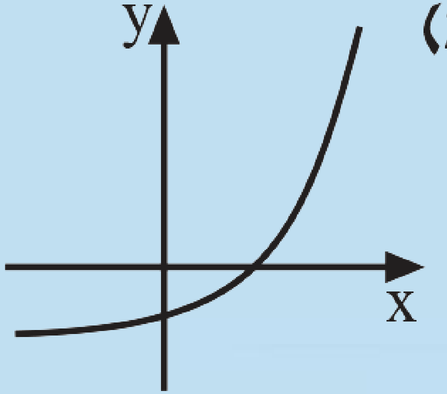


דרך ב' – כפי שראינו לפונקציה $f(x)$ יש נקודת **מינימום** בנקודה שבה $\mathbf{x = 0}$.
לכן הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ **חותכת** את ציר ה-x בנקודה $\mathbf{(0,0)}$. כלומר הגרפים האפשריים הם (3) או (4). הפונקציה $\mathbf{f(x)}$ **עולה** בתחום $x > 0$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $\mathbf{f'(x)}$ היא **חיובית**. באופן דומה הפונקציה $\mathbf{f(x)}$ **יורדת** בתחום $x < 0$ ולכן בתחום זה הפונקציה הנגזרת $\mathbf{f'(x)}$ היא **שלילית**. הגרף שמתאים למצב זה הוא גרף (3).

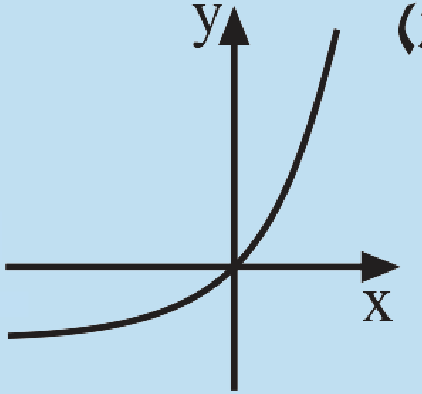
(1)



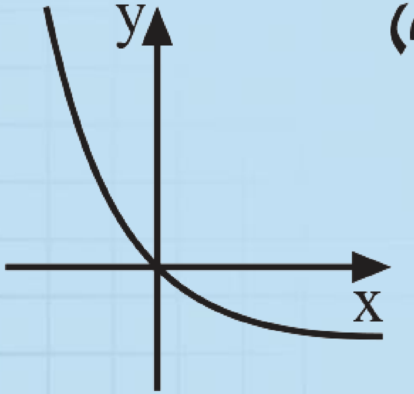
(2)



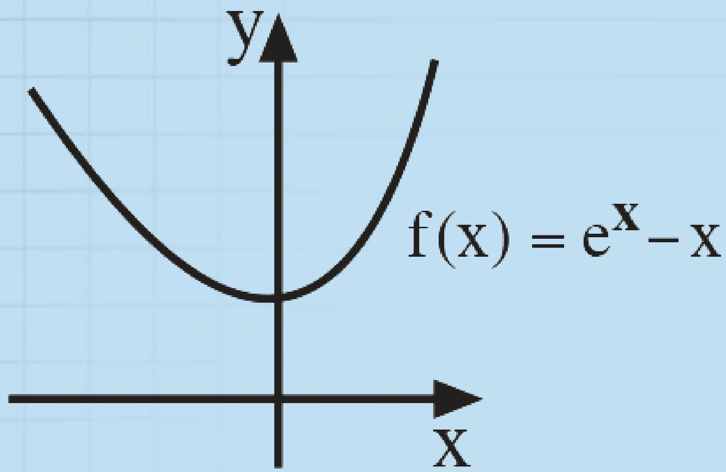
(3)



(4)



תרגיל לדוגמה



ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$.

(1) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון והיא עולה לכל x.

ז. (1) עפ"י הנתון $f(x)$ היא הנגזרת של $g(x)$. כפי שרואים מהגרף של $f(x)$ היא **לא חותכת** את ציר ה-x, כלומר הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ **לא מתאפסת** באף נקודה ולכן ל-$g(x)$ **אין** נקודות קיצון. נוסף לכך, גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מעל לציר ה-x. כלומר $f(x)$ **חיובית** לכל x, ז"א שהנגזרת של $g(x)$ חיובית לכל x, ולכן הפונקציה $g(x)$ **עולה** לכל x.

תרגיל לדוגמה

ז. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$.

(1) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון והיא עולה לכל x.

(2) מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.

(2) כאמור $f(x)$ היא הנגזרת של הפונקציה $g(x)$. לכן, כדי למצוא את שיפוע המשיק לגרף של $g(x)$ בנקודה שבה $x = 1$, צריך להציב $x = 1$ בפונקציה $f(x)$.

נקבל $f(1) = e^1 - 1 = e - 1$. כלומר שיפוע המשיק המבוקש הוא $m = e - 1$.

בהצלחה