פתרון תרגיל

עלייה וירידה-פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 237, ת. 29

המצגת נערכה ע"י דנה עידן

השאלה

29) א. הוכח שהפונקציה $f(x) = x^3 + e^{x-1} - 2$ עולה לכל x.

ב. חשב את $f(1)$ ומצא את התחום בו $f(x)$ היא חיובית ואת התחום בו היא שלילית.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + e^{x-1} - 2x$. היעזר בסעיפים א' ו-ב' ומצא:

(1) את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

(**הדרכה:** גזור את הפונקציה $g(x)$).

(2) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

א. הוכח שהפונקציה $f(x) = x^3 + e^{x-1} - 2$ עולה לכל x.

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = x^3 + e^{x-1} - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + e^{x-1}$$

מתקיים: $3x^2 \geq 0$ לכל x, וגם: $e^{x-1} > 0$ לכל x.

לכן מתקיים: $3x^2 + e^{x-1} > 0$ לכל x.

כלומר, מתקיים: $f'(x) > 0$ לכל x.

לכן הוכחנו כי f **עולה לכל x**.

ב. חשב את $f(1)$ ומצא את התחום בו $f(x)$ היא חיובית ואת התחום בו היא שלילית.

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

$$f(x) = x^3 + e^{x-1} - 2$$

$$f(1) = 1^3 + e^0 - 2 = 0$$

כיוון ש- f **עולה לכל x**, לא ייתכן שיש לה יותר מנקודת חיתוך אחת עם ציר ה-x.

לכן, נקודת החיתוך **היחידה** שלה עם ציר ה-x היא ב- $x = 1$.

כמו כן, כיוון ש- f עולה לכל x, מתקיים:

f חיובית כאשר: $x > 1$

f שלילית כאשר: $x < 1$

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + e^{x-1} - 2x$. היעזר בסעיפים א' ו-ב' ומצא:

(1) את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

<u>סעיף ג':</u>

$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 + e^{x-1} - 2x$$

$$g'(x) = x^3 + e^{x-1} - 2 = f(x)$$

(1) הנקודות החשודות כקיצון של g מתקבלות כאשר: $f(x) = 0$.

ראינו בסעיף ב' שהנקודה היחידה שבה $f(x)$ מתאפסת היא ב- $x = 1$.

לכן, הנקודה היחידה שחשודה כקיצון של g היא ב- $x = 1$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + e^{x-1} - 2x$. היעזר בסעיפים א' ו-ב' ומצא:

(1) את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

$$g''(x) = f'(x)$$

$$g''(1) = f'(1) > 0$$

ראינו ש- $f'(x) > 0$ לכל x

$$g(x) = \frac{1}{4}x^4 + e^{x-1} - 2x$$

$$g(1) = \frac{1}{4}1^4 + e^0 - 2 = -\frac{3}{4}$$

לסיכום: $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$

מינימום.

ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + e^{x-1} - 2x$. היעזר בסעיפים א' ו-ב' ומצא:

(1) את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה. (**הדרכה:** גזור את הפונקציה $g(x)$).

(2) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

(2) כיוון של-g יש רק נקודת קיצון אחת מסוג מינימום, ניתן לקבוע כי:

g יורדת כאשר $x < 1$

g עולה כאשר $x > 1$

בהצלחה