פתרון תרגיל

עלייה וירידה-פונקציות מעריכיות

מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 237, ת. 28

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

28) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{x} - e^{4-x}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. הראה שהפונקציה עולה לכל x.

ג. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $\mathbf{g'(x) = f(x)}$. היעזר בתשובות לסעיפים א׳–ג׳ ומצא את:

(1) שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.

(2) תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

ה. מצא את **שיפוע המשיק** לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 4$.

ו. מצא את נקודת הקיצון של $f'(x)$ וקבע את סוגה.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = e^{x} - e^{4-x}$$

$$e^{x} - e^{4-x} = 0$$

$$e^{x} = e^{4-x}$$

$$x = 4 - x$$

$$x = 2$$

לכן, נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x היא: **(2,0)**

ב. הראה שהפונקציה עולה לכל x.

פתרון

<u>סעיף ב':</u>

$$f(x) = e^x - e^{4-x}$$

$$f'(x) = e^x - (-1) \cdot e^{4-x}$$

$$f'(x) = e^x + e^{4-x}$$

מתקיים: $0 < e^x$ לכל x וגם: $0 < e^{4-x}$ לכל x.

לכן, לכל x מתקיים: $e^x + e^{4-x} > 0$

כלומר, לכל x מתקיים: $f'(x) > 0$. לפיכך, הפונקציה **עולה לכל** x.

ג. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

פתרון

<u>סעיף ג':</u>

הפונקציה רציפה, ולכן הנקודות היחידות שבהן היא עשויה לשנות

התנהגות מחיוביות לשליליות או להיפך הן **נקודות החיתוך עם ציר ה-x**.

בסעיף א' מצאנו שנקודת החיתוך היחידה עם ציר ה-x היא $(2,0)$

לכן, נבדוק את הסימן של הפונקציה **משמאל** ל-$2 = x$ **ומימין** ל-$2 = x$.

$$f(x) = e^{x} - e^{4-x}$$

$$f(0) = e^{0} - e^{4} < 0$$

$$f(3) = e^{3} - e^{1} > 0$$

ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$. היעזר בתשובות לסעיפים א׳–ג׳ ומצא את:

(1) שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.

(2) תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

פתרון

תחומי החיוביות: $x > 2$ **תחומי השליליות: $x < 2$**

<u>סעיף ד׳:</u>

$$g'(x) = f(x)$$

(1) הנקודות החשודות כקיצון של $g(x)$ הן הנקודות שבהן: $g'(x) = 0$.

כלומר, הנקודות החשודות כקיצון של $g(x)$ הן הנקודות שבהן: $f(x) = 0$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$. היעזר בתשובות לסעיפים א'–ג' ומצא את:

(1) שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.

(2) תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

פתרון

ראינו בסעיף א' שהפתרון למשוואה: $f(x) = 0$ הוא: $x = 2$.

נשתמש ב-g'' כדי לקבוע את סוג הקיצון.

$$g'(x) = f(x) \longrightarrow g''(x) = f'(x)$$

לכן יש לקבוע את הסימן של $f'(2)$.

בסעיף ב' ראינו ש- $f'(x) > 0$ לכל x. לכן בפרט מתקיים כי: $f'(2) > 0$.

לכן מדובר בנקודת **מינימום**.

ד. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת: $g'(x) = f(x)$. היעזר בתשובות לסעיפים א'–ג' ומצא את:

(1) שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגה.

(2) תחומי העלייה והירידה של $g(x)$.

פתרון

(2) $g'(x) = f(x)$

לפיכך, כאשר $f(x) > 0$ הפונקציה g **עולה**.

וכאשר $f(x) < 0$ הפונקציה g **יורדת.**

ראינו בסעיף ג' כי $f(x) > 0$ כאשר $x > 2$, וכי $f(x) < 0$ כאשר $x < 2$.

לפיכך, g עולה כאשר $x > 2$ g יורדת כאשר $x < 2$

ה. מצא את **שיפוע המשיק** לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 4$.

ו. מצא את נקודת הקיצון של $f'(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

סעיף ה':

$$g'(x) = f(x) = e^x - e^{4-x}$$

שיפוע המשיק של g בנקודה $x = 4$ שווה ל- $g'(4)$.

$$g'(4) = f(4) = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

סעיף ו':

$$f'(x) = e^x + e^{4-x}$$

הנקודות החשודות כקיצון של $f'(x)$ מתקבלות כאשר: $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = e^x - e^{4-x}$$

ו.   מצא את נקודת הקיצון של $f'(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

$$e^x - e^{4-x} = 0$$

$$e^x = e^{4-x}$$

$$x = 2$$

כדי לקבוע את סוג הקיצון, נציב נקודה משמאל ל-$x = 2$ ומימין ל-$x = 2$ ב-f'' כדי לבדוק מתי f' עולה ומתי היא יורדת.

$$f''(x) = e^x - e^{4-x}$$

$f''(1) = e^1 - e^3 < 0 \rightarrow$ יורדת

$f''(3) = e^3 - e^1 > 0 \rightarrow$ עולה

ו. מצא את נקודת הקיצון של $f'(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

כעת נמצא את שיעור ה-y של נקודת המינימום של $f'(x)$.

$$f'(x) = e^{x} + e^{4-x}$$

$$f'(2) = e^{2} + e^{2} = 2e^{2}$$

לכן, נקודת הקיצון של $f'(x)$ היא: $\left(2,2e^{2}\right)$ **מינימום**.

בהצלחה