פתרון תרגיל

מציאת נקודות קיצון של פונקציות מעריכיות
מתמטיקה (4 יח"ל) חלק ג'

482 , עמ' 232, ת. 54

המצגת נערכה ע״י דנה עידן

השאלה

54) נתונה הפונקציה $f(x) = axe^{ax}$, $a \neq 0$.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה (היעזר ב-a).

ב. הסבר מדוע שיעור ה-y של נקודת הקיצון לא תלוי ב-a.

ג. נתון ששיעור ה-x של נקודת הקיצון הוא שיעור ה-x של קודקוד הפרבולה $y = x^2 - 3x + 2$. מצא את a.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה (היעזר ב-a).

פתרון

סעיף א':

$$f(x) = axe^{ax}$$

$$f'(x) = (ax)'e^{ax} \quad + ax \cdot (e^{ax})'$$

$$f'(x) = ae^{ax} + ax \cdot ae^{ax}$$

$$f'(x) = ae^{ax}(1 + ax)$$

$$ae^{ax}(1 + ax) = 0$$

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה (היעזר ב-a).

פתרון

$$ae^{ax}(1+ax)=0$$

$$1+ax=0$$

$$ax=-1$$

$$x=-\frac{1}{a}$$

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה (היעזר ב-a).

פתרון

נשתמש ב-y'' כדי לקבוע את סוג הקיצון.

$$f'(x) = ae^{ax}(1 + ax)$$

$$f''(x) = (ae^{ax})' \cdot (1 + ax) + ae^{ax} \cdot (1 + ax)'$$

$$f''(x) = a^2e^{ax} \cdot (1 + ax) + ae^{ax} \cdot a$$

$$f''\left(-\frac{1}{a}\right) = 0 + a^2 \cdot \text{חיובי} > 0$$

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה (היעזר ב-a).

פתרון

נמצא את שיעור ה-y של נקודת הקיצון.

$$f(x) = axe^{ax}$$

$$x = -\frac{1}{a} \rightarrow f\left(-\frac{1}{a}\right) = \mathrm{a} \cdot -\frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)}$$

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = -1 \cdot e^{-1} = -e^{-1}$$

ב. הסבר מדוע שיעור ה-y של נקודת הקיצון לא תלוי ב-a.

פתרון

לסיכום: $\left(-\frac{1}{a}, -e^{-1}\right)$ **מינימום**

סעיף ב':

שיעור ה-y של נקודת הקיצון הוא: $-e^{-1}$.

זהו ביטוי ש- a **אינו** מופיע בו. לכן הביטוי **אינו** תלוי ב-a.

ג. נתון ששיעור ה-x של נקודת הקיצון הוא שיעור ה-x של קודקוד הפרבולה $y = x^2 - 3x + 2$. מצא את a.

פתרון

<u>סעיף ג':</u>

$$y = x^2 - 3x + 2$$

<u>תזכורת</u>: שיעור ה-x של נקודת הקדקוד של פרבולה הוא: $-\frac{b}{2a}$

לכן, שיעור ה-x של קדקוד הפרבולה הנ"ל הוא: $-\frac{-3}{2 \cdot 1}$

כלומר, שיעור ה-x של הקדקוד הוא: $\frac{3}{2}$

ג. נתון ששיעור ה-x של נקודת הקיצון הוא שיעור ה-x של קודקוד הפרבולה $y = x^2 - 3x + 2$. מצא את a.

פתרון

נשווה בין שיעור ה-x של נקודת הקיצון לבין שיעור ה-x של הקדקוד.

$$-\frac{1}{a} = \frac{3}{2}$$

$$3a = -2$$

$$\boldsymbol{a = -\frac{2}{3}}$$

בהצלחה