הקנייה

משפט דמיון ראשון

מתמטיקה (4–5 יח"ל) חלק א'

581–481 , עמ' 343–341

המצגת נערכה ע"י טל מדר

משפט דמיון ראשון

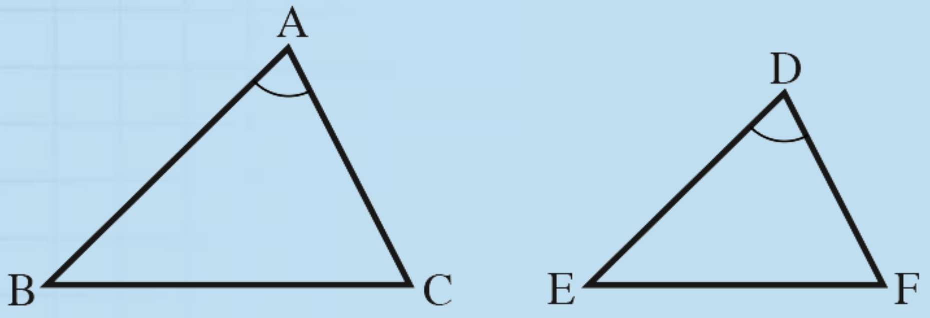
בדומה למשפטי חפיפה קיימים גם **משפטי דמיון**. אנו נדון **בשלושה** משפטי דמיון המתקבלים משלושת משפטי החפיפה הראשונים. כפי שנראה בהמשך, ההבדל בין משפטי החפיפה למשפטי הדמיון הוא שבמשפטי **החפיפה הצלעות** המתאימות הן **שוות** ואילו במשפטי **הדמיון הצלעות** המתאימות הן **פרופורציוניות**. **הזויות** המתאימות בשני המקרים הן **שוות**. נתחיל עם **משפט הדמיון הראשון** שניסוחו דומה למשפט החפיפה הראשון (צלע, זוית, צלע).

הקנייה

משפט דמיון ראשון:

אם שתי צלעות במשולש אחד מתייחסות באותו יחס לשתי צלעות מתאימות במשולש שני והזווית שבין הצלעות שווה בהתאמה אז המשולשים דומים.

הקנייה



ניסוח משפט הדמיון הראשון **בשפה מתמטית:**

אם בשני משולשים ABC ו-DEF **מתקיימים:**

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}, \quad \sphericalangle A = \sphericalangle D$$

אז: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

הסבר כללי של **ההוכחה:**

מסמנים נקודות G ו-H על הצלעות AB ו-AC של המשולש ABC כך שמתקיים $AG = DE$ ו-$AH = DF$. ע"ס הנתון $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ והמשפט ההפוך למשפט תלס מקבלים $GH \| BC$. ע"ס הרחבה (I) של משפט תלס מקבלים $\Delta ABC \sim \Delta AGH$.

ע"ס משפט חפיפה ראשון מקבלים $\Delta AGH \cong \Delta DEF$ ולכן $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

הקנייה

הערות:

א) מדמיון המשולשים ABC ו-DEF עפ"י הנתונים הנ"ל נובעים **שוויונים נוספים** והם:

(1) $\measuredangle B = \measuredangle E$, (2) $\measuredangle C = \measuredangle F$, (3) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (או $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$).

ב) משפט הדמיון הראשון נקרא גם **"צלע, זוית, צלע"** או בקיצור **צ.ז.צ.**

ג) ניסוח מקוצר של משפט דמיון ראשון הוא:

אם בשני משולשים שתי צלעות פרופורציוניות והזוית ביניהן שווה בהתאמה אז המשולשים דומים.

ד) את הפרופורציה $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ אפשר לרשום בצורת **מכפלה** באופן הבא:

$AC \cdot DE = AB \cdot DF$.

ה) מסקנה ממשפט הדמיון הראשון:

שני משולשים ישרי זוית שניצביהם פרופורציוניים – דומים.

תרגיל לדוגמה

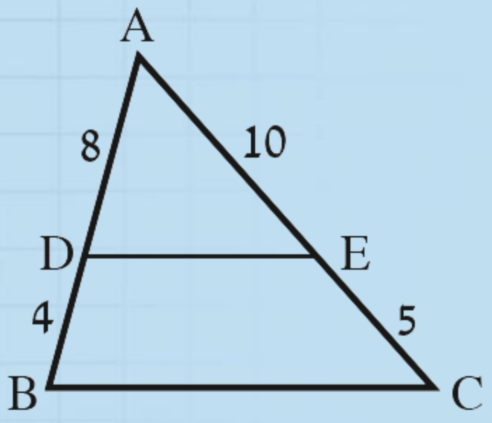
דוגמא:

הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC של משולש ABC.

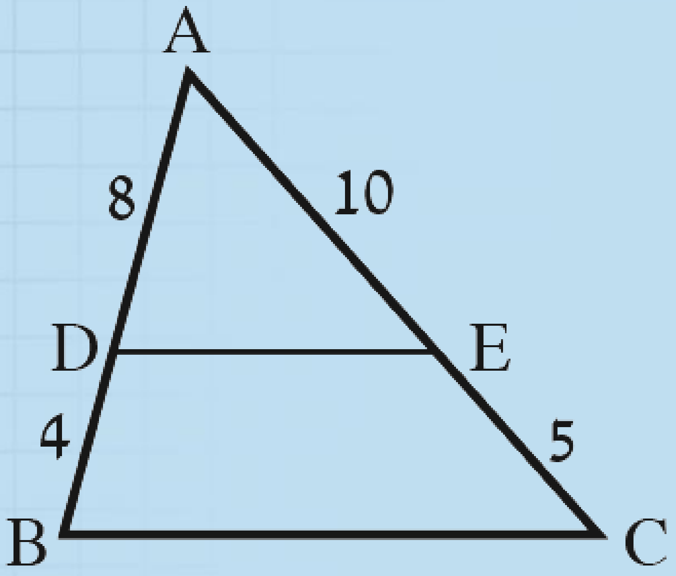
א. הוכח עפ"י הנתונים בציור שמתקיים: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

ב. הוכח: $DE \parallel BC$.

ג. נתון: $DE = 9$ ס"מ. חשב את BC.



תרגיל לדוגמה



פתרון:

א. נוכיח שהמשולשים ADE ו-ABC דומים.

הוכחה:

שלב א':

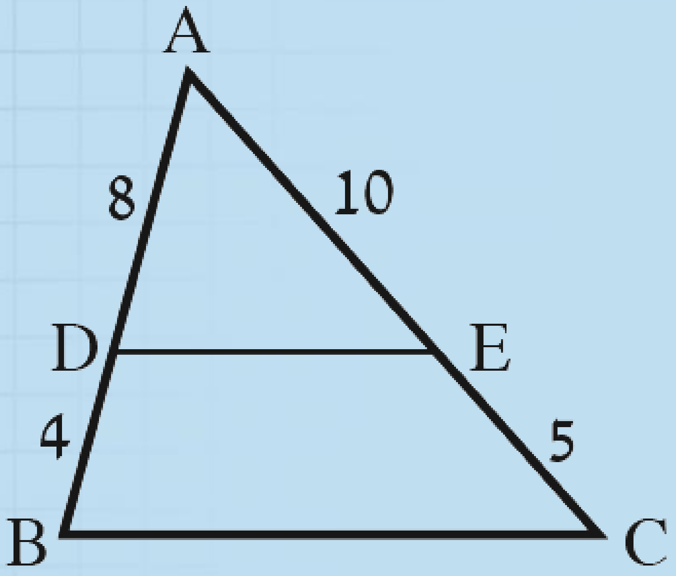
$$\frac{AD}{AB}=\frac{8}{8+4}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3} \quad \text{(נתון)}$$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{10}{10+5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3} \quad \text{(נתון)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

תרגיל לדוגמה



שלב ב':

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} & \text{(הוכחנו בשלב א')} \\ \measuredangle A = \measuredangle A & \text{(זווית משותפת)} \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

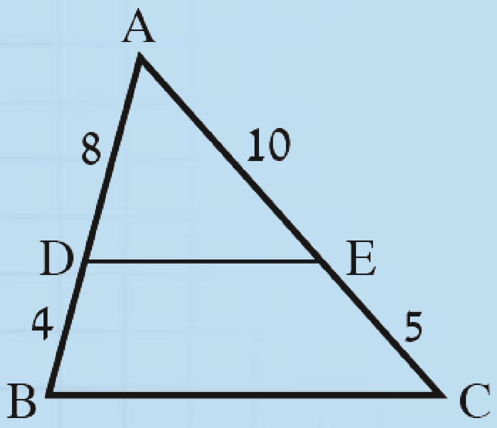
$\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (עפ"י משפט הדמיון צ.ז.צ.)

מש"ל.

שים לב: יחס הדמיון בין המשולש ADE למשולש ABC הוא $3:2$ או $\frac{2}{3}$.

תרגיל לדוגמה

ב. מדמיון המשולשים נובע שהזויות המתאימות שוות ולכן $\measuredangle ADE = \measuredangle B$
וכן $\measuredangle AED = \measuredangle C$. הזויות B ו-ADE הן זויות מתאימות בין הישרים DE ו-BC,
היות והן שוות אז $DE \parallel BC$.



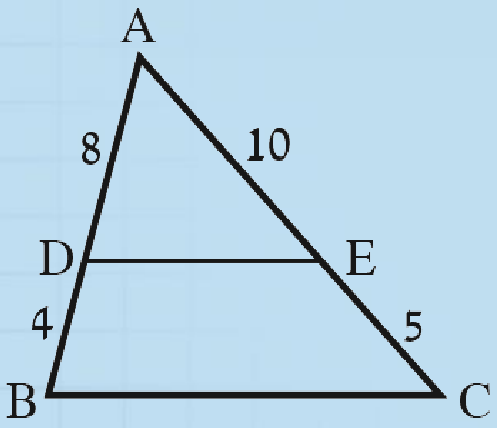
תרגיל לדוגמה

ג. מדמיון המשולשים נובע גם השוויון $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ (או $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$).

עפ"י הנתון: $DE = 9$ ס"מ. אם נסמן $BC = x$, נקבל $\frac{2}{3} = \frac{9}{x}$,

כלומר $2x = 27$ ולכן $x = 13.5$.

לסיכום: $BC = 13.5$ ס"מ.



בהצלחה