פתרון מתכונת

שאלה 5–מבחן 1

שאלון 582

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה

5) $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת בתחום $x > 0$ ומקיימת $f(1) = 0$.

$F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ המקיימת $F(x) = x \cdot f(x) - x$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ ואת הפונקציה $F(x)$.

ב. $g(x)$ היא הפונקציה המוגדרת על ידי: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה g וסרטטו את גרף הפונקציה g.

(2) קבעו מי מהאינטגרלים הבאים גדול יותר ונמקו: $\int_1^e f(x)dx$ או $\int_1^e g(x)dx$.

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ שעובר בראשית הצירים והוסיפו את סרטוטו לגרף הפונקציה $g(x)$.

(4) השטח המוגבל בין המשיק הנ"ל, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.
חשבו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

$f(x)$ היא פונקציה המוגדרת בתחום $x > 0$ ומקיימת $f(1) = 0$.

$F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ המקיימת $F(x) = x \cdot f(x) - x$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ ואת הפונקציה $F(x)$.

פתרון

$$F'(x) = (x \cdot f(x) - x)' = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x) - 1$$

$$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + x \cdot f'(x) - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$f(x)$ היא פונקציה המוגדרת בתחום $x > 0$ ומקיימת $f(1) = 0$.

$F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ המקיימת $F(x) = x \cdot f(x) - x$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ ואת הפונקציה $F(x)$.

פתרון

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור $0 < x$:

$$f(x) = \ln x + C$$

נמצא את הקבוע C

$f(x)$ היא פונקציה המוגדרת בתחום $x > 0$ ומקיימת $f(1) = 0$.

$F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$ המקיימת $F(x) = x \cdot f(x) - x$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ ואת הפונקציה $F(x)$.

פתרון

$$f(1) = 0$$

$$f(1) = \ln 1 + C = 0$$

$$C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{f(x) = \ln x} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F(x) = x \cdot \ln x - x}$$

ב. $g(x)$ היא הפונקציה המוגדרת על ידי: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה g וסרטטו את גרף הפונקציה g.

פתרון

$$\boldsymbol{g(x)=\sqrt{\ln x}}$$

תחום הגדרה:

$$\ln x \geq 0 \qquad\qquad x > 0$$

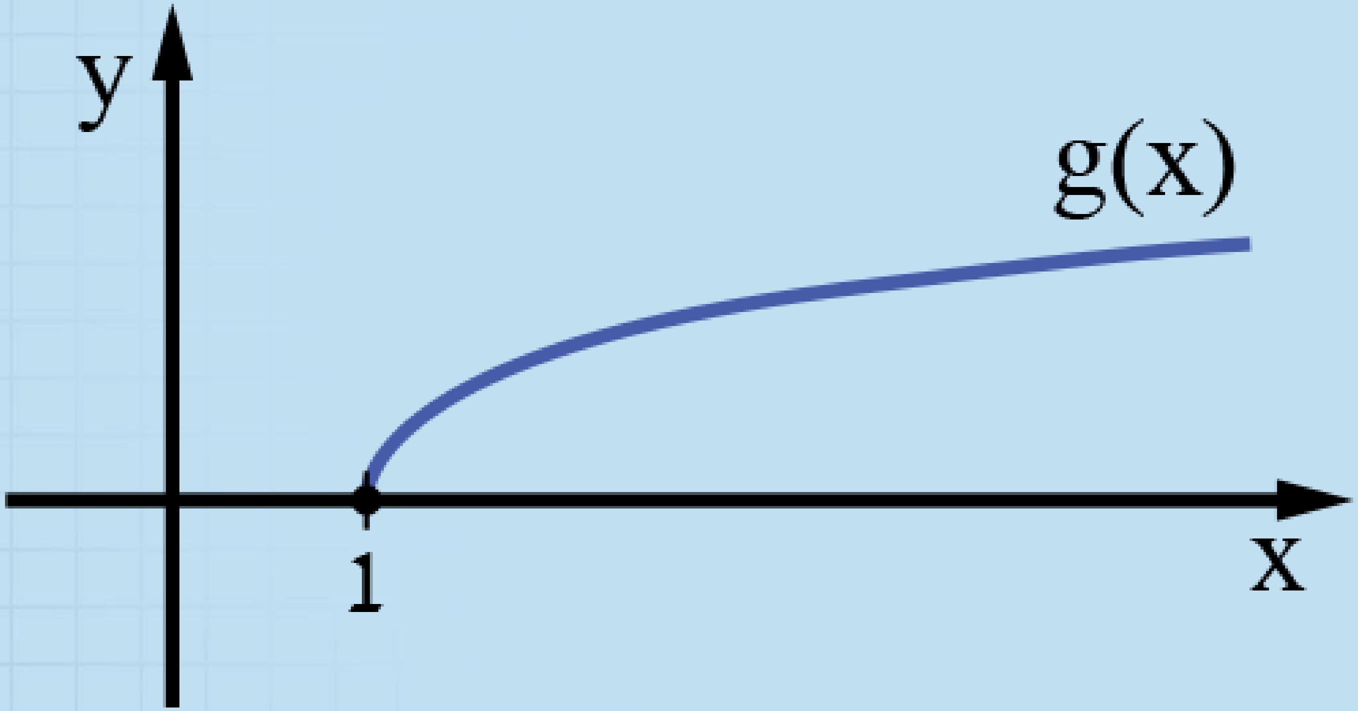
$$x \geq 1$$

חיתוך בין הדרישות: $\boldsymbol{x \geq 1}$

ב. $g(x)$ היא הפונקציה המוגדרת על ידי: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה g וסרטטו את גרף הפונקציה g.

פתרון



(2) קבעו מי מהאינטגרלים הבאים גדול יותר ונמקו: $\int_1^e f(x)dx$ או $\int_1^e g(x)dx$.

פתרון

$$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \ln x \, dx$$

$$\int_1^e g(x)dx = \int_1^e \sqrt{f(x)}dx = \int_1^e \sqrt{\ln x}\, dx$$

נתייחס למשמעות האינטגרל המסוים – השטח הכלוא בין גרף הפונקציה (האי שלילית), ציר ה- x וגבולות האינטגרציה

(2) קבעו מי מהאינטגרלים הבאים גדול יותר ונמקו: $\int_1^e f(x)dx$ או $\int_1^e g(x)dx$.

פתרון

שתי הפונקציות עולות בתחום הגדרתן

$$f(1) = 0$$

$$f(e) = \ln e = 1$$

בגבולות האינטגרל המסוים, ערכי הפונקציה $f(x)$ הם **שבר פשוט חיובי**

(2) קבעו מי מהאינטגרלים הבאים גדול יותר ונמקו: $\int_1^e f(x)dx$ או $\int_1^e g(x)dx$.

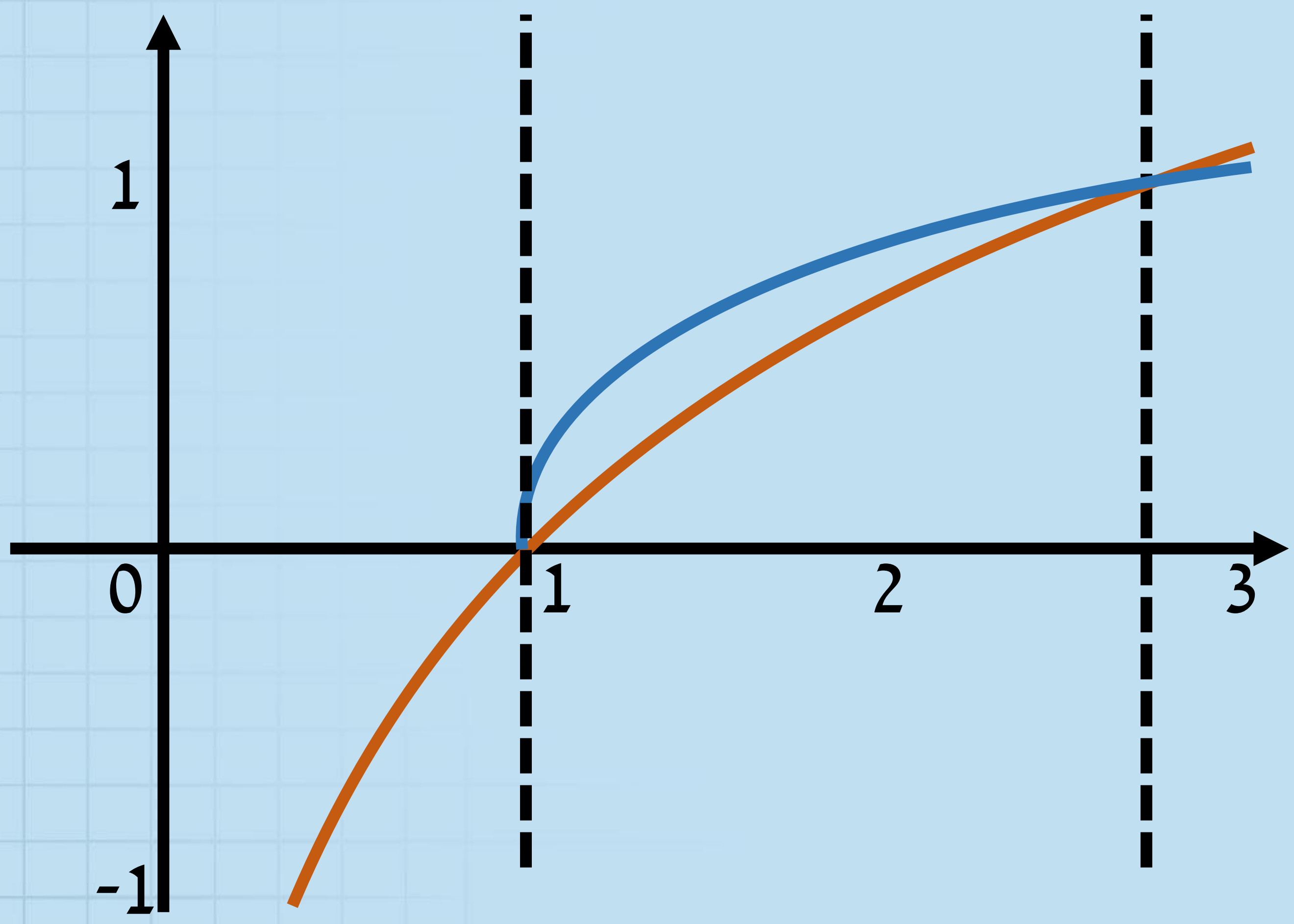
פתרון

שורש של שבר פשוט חיובי **מגדיל** את ערך הביטוי, ולכן בתחום זה,
הגרף של הפונקציה $g(x)$ יהיה מעל גרף הפונקציה $f(x)$
ומכאן שיצור שטח גדול יותר

$$\int_1^e g(x)dx > \int_1^e f(x)dx$$

(2) קבעו מי מהאינטגרלים הבאים גדול יותר ונמקו: $\int_1^e f(x)dx$ או $\int_1^e g(x)dx$.

פתרון



$$\int_1^e g(x)dx > \int_1^e f(x)dx$$

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ שעובר בראשית הצירים והוסיפו את סרטוטו לגרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

נסמן את שיעור ה- x של נקודת ההשקה, $x = t$

שיפוע של משיק שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה: $m = g'(t)$

$$g'(x) = \left(\sqrt{\ln x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\boldsymbol{m = g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{\ln t}}}$$

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ שעובר בראשית הצירים והוסיפו את סרטוטו לגרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

נחשב את שיפוע המשיק באמצעות שיפוע בין שתי נקודות,
נקודות ההשקה (מתוך הפונקציה) וראשית הצירים (נתון)

נקודות ההשקה :

$$(t, g(t)) = \left(t, \sqrt{\ln t}\right)$$

$$\boldsymbol{m = \frac{\sqrt{ln\, t} - 0}{t - 0} = \frac{\sqrt{ln\, t}}{t}}$$

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ שעובר בראשית הצירים והוסיפו את סרטוטו לגרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{ln\, t}}{t} = \frac{1}{2t\sqrt{ln\, t}}$$

$$2\, ln\, t = 1$$

$$ln\, t = \frac{1}{2}$$

$$t = \sqrt{e}$$

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ שעובר בראשית הצירים והוסיפו את סרטוטו לגרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

$\Downarrow$

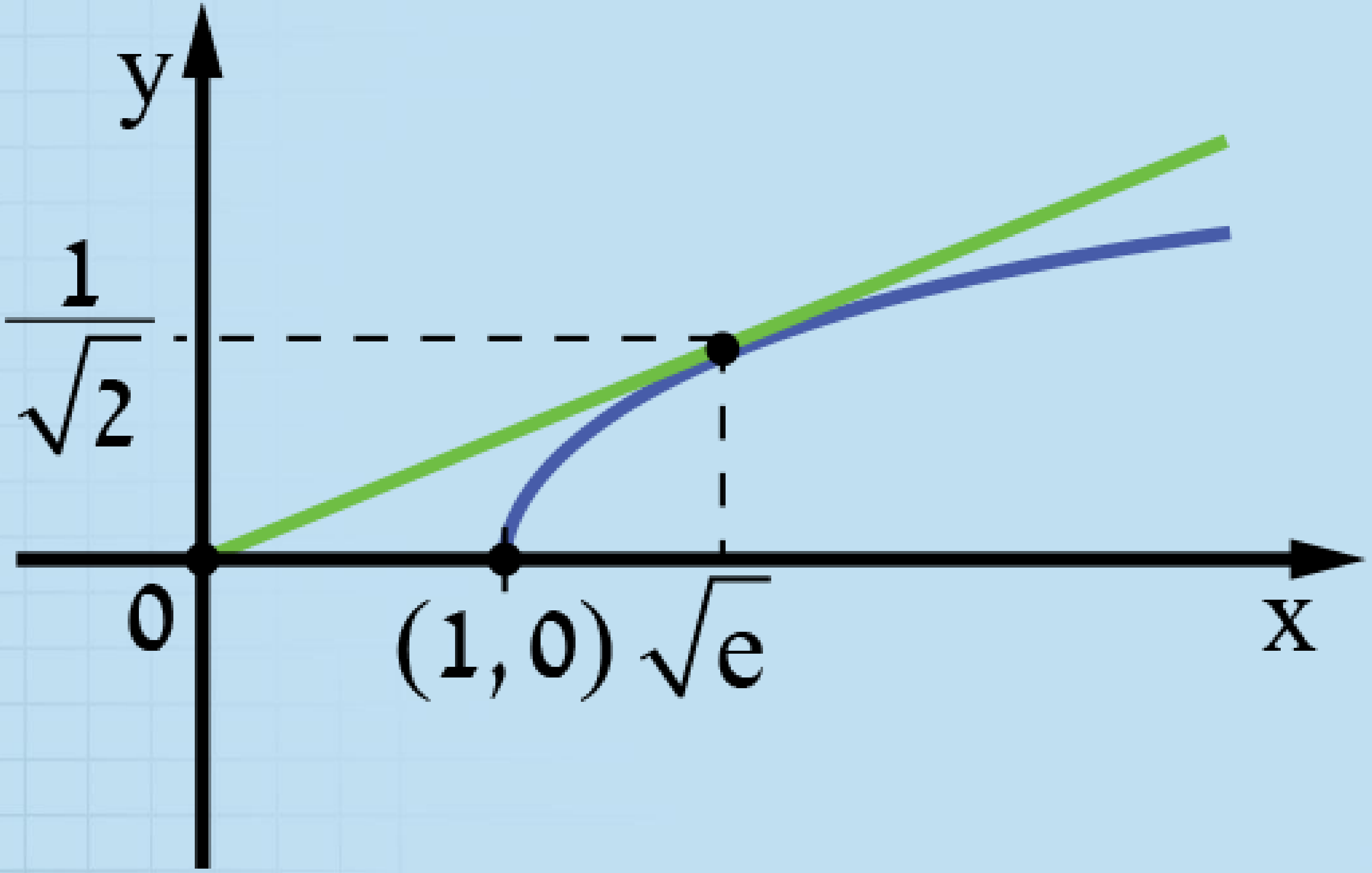
$$m = \frac{\sqrt{ln\sqrt{e}}}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$$

משוואת ישר ששיפועו $m = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ העובר בראשית הצירים:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{2e}}x}$$

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ שעובר בראשית הצירים והוסיפו את סרטוטו לגרף הפונקציה $g(x)$.

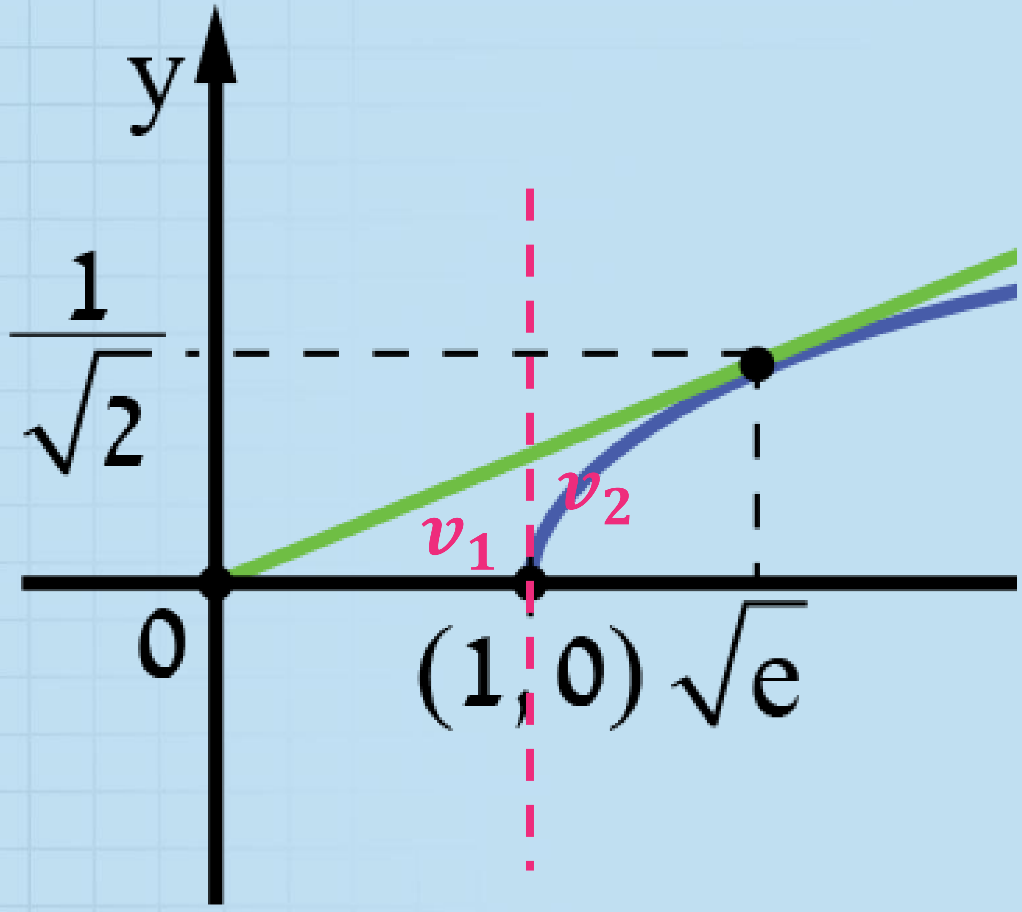
פתרון



(4) השטח המוגבל בין המשיק הנ"ל, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.

חשבו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

פתרון



על מנת לחשב את הנפח הכולל, נפריד אותו לשני נפחים נפרדים כך שכל אחד מהם נוצר ע"י שתי פונקציות בלבד וגבולות אינטגרציה

$$v_1 = \pi \int_0^1 y^2 \, dx$$

$$v_2 = \pi \int_1^{\sqrt{e}} y^2 - g^2(x) dx$$

(4) השטח המוגבל בין המשיק הנ״ל, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.
חשבו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

פתרון

$$v_1 = \pi \int_0^1 y^2\,dx = \pi \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{2e}}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{2e}\,dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{2e \cdot 3}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{6e} - 0\right) = \frac{1}{6e}\pi$$

(4) השטח המוגבל בין המשיק הנ"ל, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.

חשבו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

פתרון

$$v_2 = \pi\int_1^{\sqrt{e}} y^2 - g^2(x)dx = \pi\int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2e} - f(x)dx =$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{2e\cdot 3} - (x\cdot\ln x - x)\right]_1^{\sqrt{e}} \quad = \pi\left[\frac{x^3}{6e} - x\cdot\ln x + x\right]_1^{\sqrt{e}}$$

(4) השטח המוגבל בין המשיק הנ"ל, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.

חשבו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

פתרון

$$v_2 = \pi\left[\frac{x^3}{6e} - x\cdot\ln x + x\right]_1^{\sqrt{e}} = \pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{e} - \frac{1}{6e} - 1\right)$$

(4) השטח המוגבל בין המשיק הנ"ל, גרף הפונקציה $g(x)$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.

חשבו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.

פתרון

$$\Downarrow$$

$$v = v_1 + v_2 = \frac{1}{6e}\pi + \pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{e} - \frac{1}{6e} - 1\right) = \pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{e} - 1\right)$$

$$\boldsymbol{v = 0.3114}$$

בהצלחה