פתרון מתכונת

שאלה 3–מבחן 1

שאלון 582

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה

3) א. p הוא פרמטר חיובי. הוכיחו כי כל המספרים המרוכבים $z=x+yi$ המקיימים את המשוואה

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(z-\frac{p}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{p}{2}\right)}$ נמצאים במישור של גאוס על פרבולה.

ב. הפרבולה שמצאת בסעיף א' חותכת את המקום הגאומטרי $|z|=1$ בשתי נקודות.

אחת הנקודות מתאימה למספר המרוכב $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

מצאו את p ואת הנקודה הנוספת.

ג. w הוא המספר המרוכב המתאים לנקודה שמצאת בסעיף ב' ונמצאת ברביע הראשון.

w הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה היא $q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

חשבו את המכפלה $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6$.

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(z-\frac{p}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{p}{2}\right)}$$ נמצאים במישור של גאוס על פרבולה.

פתרון

נציב $z=x+yi$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}+yi\right)\left(x-\frac{p}{2}-yi\right)$$

עפ"י נוסחאות כפל מקוצר: $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2-(yi)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(z-\frac{p}{2}\right)\overline{\left(z-\frac{p}{2}\right)}$$ נמצאים במישור של גאוס על פרבולה.

פתרון

$$y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$$

עפ"י נוסחאות כפל מקוצר:

$$y^2=\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(x-\frac{p}{2}\right)\right]\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)-\left(x-\frac{p}{2}\right)\right]=2x\cdot p$$

$$\boldsymbol{y^2=2px}$$

ב. הפרבולה שמצאת בסעיף א' חותכת את המקום הגאומטרי $|z|=1$ בשתי נקודות.

אחת הנקודות מתאימה למספר המרוכב $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. מצאו את p ואת הנקודה הנוספת.

פתרון

המספר המרוכב הנתון ממוקם במישור גאוס: $Z=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

הנקודה על הפרבולה ולכן מקיימת את משוואתה:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2p\cdot\frac{1}{2}$$

$$p=\frac{3}{4}$$

ב. הפרבולה שמצאת בסעיף א' חותכת את המקום הגאומטרי $|z|=1$ בשתי נקודות.

אחת הנקודות מתאימה למספר המרוכב $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. מצאו את p ואת הנקודה הנוספת.

פתרון

המקום הגיאומטרי $|Z|=1$:

נציב $z=x+yi$

$$|x+yi|=1$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=1$$

$$x^2+y^2=1$$

המקום הגיאומטרי הוא מעגל היחידה

ב. הפרבולה שמצאת בסעיף א׳ חותכת את המקום הגאומטרי $|z|=1$ בשתי נקודות.

אחת הנקודות מתאימה למספר המרוכב $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. מצאו את p ואת הנקודה הנוספת.

פתרון

חיתוך בין שני המקומות הגיאומטריים :

$$y^2=\frac{3}{2}x$$

$$x^2+y^2=1$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+\frac{3}{2}x=1$$

ב. הפרבולה שמצאת בסעיף א' חותכת את המקום הגאומטרי $|z|=1$ בשתי נקודות.
אחת הנקודות מתאימה למספר המרוכב $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. מצאו את p ואת הנקודה הנוספת.

פתרון

$$x^2+\frac{3}{2}x-1=0$$

עפ"י נוסחת השורשים:

$$x=\frac{1}{2} \qquad \cancel{x=-2}$$

עפ"י הגדרת הפרבולה

$$0<x$$

ב. הפרבולה שמצאת בסעיף א' חותכת את המקום הגאומטרי $|z|=1$ בשתי נקודות.

אחת הנקודות מתאימה למספר המרוכב $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. מצאו את p ואת הנקודה הנוספת.

פתרון

$\Downarrow$

$$y^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

הנקודה הנתונה $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

נקודת החיתוך הנוספת: $Z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ג. w הוא המספר המרוכב המתאים לנקודה שמצאת בסעיף ב' ונמצאת ברביע הראשון.

w הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה היא $q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. חשבו את המכפלה $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6$.

פתרון

$$W=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נעבור להצגה קוטבית:

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$tg\,\vartheta=\sqrt{3}$$

הזווית ברביע הראשון

$$\vartheta=60^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$W=cis\,60^\circ$$

ג. w הוא המספר המרוכב המתאים לנקודה שמצאת בסעיף ב' ונמצאת ברביע הראשון.

w הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה היא $q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. חשבו את המכפלה $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6$.

פתרון

$$q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

נעבור להצגה קוטבית:

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

$$tg\,\vartheta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

הזווית ברביע הראשון

$$\vartheta=30^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$q=cis\,30^\circ$$

ג. w הוא המספר המרוכב המתאים לנקודה שמצאת בסעיף ב' ונמצאת ברביע הראשון.

w הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה היא $q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. חשבו את המכפלה $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$.

פתרון

איבר כללי בסדרה הנדסית: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

$$a_1 = cis\, 60°$$

$$a_2 = cis\, 60° \cdot cis\, 30° = cis\, 90°$$

$$a_3 = cis\, 90° \cdot cis\, 30° = cis\, 120°$$

ג. w הוא המספר המרוכב המתאים לנקודה שמצאת בסעיף ב׳ ונמצאת ברביע הראשון.

w הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה היא $q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. חשבו את המכפלה $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$.

פתרון

$$a_4 = cis\,120° \cdot cis\,30° = cis\,150°$$

$$a_5 = cis\,150° \cdot cis\,30° = cis\,180°$$

$$a_6 = cis\,180° \cdot cis\,30° = cis\,210°$$

ג. w הוא המספר המרוכב המתאים לנקודה שמצאת בסעיף ב' ונמצאת ברביע הראשון.

w הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה היא $q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. חשבו את המכפלה $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$.

פתרון

⇓

$$a_1 \cdot \ \ldots \cdot a_6 = cis\,\underbrace{(60° + \cdots + 210°)}$$

סכום **סדרה חשבונית**.

6 איברים, ערך הראשון $60°$, ערך האחרון $210°$, וההפרש $d = 30°$

$$S=\frac{6}{2}(60°+210°)=810°$$

ג. w הוא המספר המרוכב המתאים לנקודה שמצאת בסעיף ב' ונמצאת ברביע הראשון.

w הוא האיבר הראשון של סדרה הנדסית שמנתה היא $q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$. חשבו את המכפלה $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6$.

פתרון

$$a_1\cdot\ \ldots\ \cdot a_6 = cis\ (810°) = cis(90° + 2\cdot 360°)$$

$$= \boldsymbol{cis\ (90°) = i}$$

בהצלחה