פתרון מתכונת

שאלה 2–מבחן 1

שאלון 582

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה

2) נתונים שני מישורים:

$\pi_1 : \underline{x} = (-7, 0, 0) + t(2, -1, 0) + s(2, 0, -3)$, $\pi_2 : -6x + 2y + 3z + 28 = 0$.

א. הראו כי המישורים מאונכים זה לזה.

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_1 העובר בראשית הצירים ומקביל לשני המישורים.

ג. חשבו את מרחקו של הישר ℓ_1 מכל אחד משני המישורים הנתונים.

ד. נסמן ב- ℓ_2 את ישר החיתוך בין שני המישורים הנתונים.

(1) מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_2 .

(2) חשבו את המרחק בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 .

$\pi_2: -6x+2y+3z+28=0 \qquad , \pi_1: \underline{x} = (-7,0,0)+t(2,-1,0)+s(2,0,-3)$

א. הראו כי המישורים מאונכים זה לזה.

פתרון

שני המישורים מאונכים זה לזה אם מתקיים $N_{\pi_1} \perp N_{\pi_2}$

צ.ל. $\boldsymbol{N_{\pi_1} \cdot N_{\pi_2} = 0}$

נמצא את $\boldsymbol{N_{\pi_1} = (A,B,C)}$

וקטור הנורמל מאונך למישור, ומכאן שלכל ישר המוכל במישור:

$\pi_1 : \underline{x} = (-7, 0, 0) + t(2, -1, 0) + s(2, 0, -3)$, $\pi_2 : -6x + 2y + 3z + 28 = 0$

א. הראו כי המישורים מאונכים זה לזה.

פתרון

$$(A,B,C)\cdot(2,0,-3)=0$$

$$(A,B,C)\cdot(2,-1,0)=0$$

$$2A-3C=0$$

$$2A-B=0$$

$$\boldsymbol{C=\frac{2}{3}A}$$

$$\boldsymbol{B=2A}$$

נבחר שרירותית $A=3$: $\Leftarrow$ $B=6\,,C=2$

$\pi_1 : \underline{x} = (-7, 0, 0) + t(2, -1, 0) + s(2, 0, -3)$, $\pi_2 : -6x + 2y + 3z + 28 = 0$

א. הראו כי המישורים מאונכים זה לזה.

פתרון

$$N_{\pi_1} = (3, 6, 2)$$

$$\Downarrow$$

$$N_{\pi_1} \cdot N_{\pi_2} = (3,6,2) \cdot (-6,2,3) = -18 + 12 + 6 = 0$$

מ.ש.ל - המישורים מאונכים זה לזה

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_1 העובר בראשית הצירים ומקביל לשני המישורים.

פתרון

הצגה פרמטרית של ישר, מהצורה

$$\ell_1:\ \underline{x} = \underbrace{\text{נקודה}}_{(0,0,0)} + t \cdot \underbrace{\text{כיוון}}$$

$\ell_1 \parallel \pi_1$ $\quad$ $\ell_1 \parallel \pi_2$

כיוון הישר ℓ_1 מאונך לוקטורי הנורמל של שני המישורים

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_1 העובר בראשית הצירים ומקביל לשני המישורים.

פתרון

$$\text{כיוון}_{\ell_1} \cdot N_{\pi_2} = 0$$

$$(a,b,c)\cdot(-6,2,3) = 0$$

$$-6a + 2b + 3c = 0$$

$$\text{כיוון}_{\ell_1} \cdot N_{\pi_1} = 0$$

$$(a,b,c)\cdot(3,6,2) = 0$$

$$3a + 6b + 2c = 0$$

נרחיב את המשוואה פי 2

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_1 העובר בראשית הצירים ומקביל לשני המישורים.

פתרון

$$6a + 12b + 4c = 0$$

$$-6a + 2b + 3c = 0$$

נחבר בין המשוואות:

$$14b + 7c = 0$$

$$\boldsymbol{c = -2b}$$

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_1 העובר בראשית הצירים ומקביל לשני המישורים.

פתרון

$\Downarrow$

$$3a + 6b + 2 \cdot (-2b) = 0$$

$$\boldsymbol{a = -\frac{2}{3}b}$$

נבחר שרירותית $b = -3$: $\Leftarrow$ $a = 2\,, C = 6$

כיוון הישר ℓ_1 $\boldsymbol{(a, b, c) = (2, -3, 6)}$

ב. מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_1 העובר בראשית הצירים ומקביל לשני המישורים.

פתרון

הצגה פרמטרית של הישר ℓ_1

$$\ell_1:\ \underline{x} = t(2,-3,6)$$

ג.   חשבו את מרחקו של הישר ℓ_1 מכל אחד משני המישורים הנתונים.

פתרון

מרחק בין ישר המקביל למישור מוגדר כאורך האנך בין המישור לישר

נבחר נקודה על הישר ℓ_1 ונחשב את מרחקה מכל אחד מהמישורים,
עפ״י הנוסחה למרחק נקודה ממישור

ראשית הצירים על הישר ℓ_1 :

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ג. חשבו את מרחקו של הישר ℓ_1 מכל אחד משני המישורים הנתונים.

פתרון

משוואת המישור π_1

$$N_{\pi_1} = (3,6,2)$$

$$\pi_1: 3x + 6y + 2z + D = 0$$

הנקודה $(-7,0,0)$ על המישור ולכן מקיימת את משוואתו:

$$3 \cdot (-7) + D = 0$$

$$D = 21$$

ג. חשבו את מרחקו של הישר ℓ_1 מכל אחד משני המישורים הנתונים.

פתרון

$$\pi_1: 3x + 6y + 2z + 21 = 0$$

מרחק ראשית הצירים ממישור π_1:

$$d_1 = \frac{|21|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{21}{\sqrt{49}} = 3$$

ג. חשבו את מרחקו של הישר ℓ_1 מכל אחד משני המישורים הנתונים.

פתרון

$$\pi_2: -6x + 2y + 3z + 28 = 0$$

מרחק ראשית הצירים ממישור π_2:

$$\boldsymbol{d_2} = \frac{|28|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{28}{\sqrt{49}} = \mathbf{4}$$

ד. נסמן ב- ℓ_2 את ישר החיתוך בין שני המישורים הנתונים. (1) מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_2

פתרון

$$\pi_1: 3x + 6y + 2z + 21 = 0$$

$$\pi_2: -6x + 2y + 3z + 28 = 0$$

נמצא את הנקודה האופיינית של ℓ_2 , נסמן $z = t$:

$$\pi_1: 3x + 6y + 2t + 21 = 0$$

$$\pi_2: -6x + 2y + 3t + 28 = 0$$

נרחיב את משוואת המישור π_1 פי 2

ד. נסמן ב- ℓ_2 את ישר החיתוך בין שני המישורים הנתונים. (1) מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_2

פתרון

$$\pi_1: 6x + 12y + 4t + 42 = 0$$

$$\pi_2: -6x + 2y + 3t + 28 = 0$$

נחבר בין המשוואות:

$$14y + 7t + 70 = 0$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}t - 5}$$

ד. נסמן ב- ℓ_2 את ישר החיתוך בין שני המישורים הנתונים. (1) מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_2

פתרון

$$\Downarrow$$

$$\pi_1: 3x + 6\left(-\frac{1}{2}t - 5\right) + 2t + 21 = 0$$

$$3x - 3t - 30 + 2t + 21 = 0$$

$$x = \frac{1}{3}t + 3$$

ד. נסמן ב- ℓ_2 את ישר החיתוך בין שני המישורים הנתונים. (1) מצאו הצגה פרמטרית לישר ℓ_2

פתרון

$\Downarrow$

הנקודה האופיינית של ℓ_2:

$$\left(\frac{1}{3}t+3,-\frac{1}{2}t-5,t\right)$$

נביא להצגה פרמטרית:

$$\ell_2:\ \underline{x}=(3,-5{,}0)+t^*\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},1\right)$$

$$\boldsymbol{\ell_2:\ \underline{x}=(3,-5,0)+t(2,-3,6)}$$

ד. (2) חשבו את המרחק בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2.

פתרון

$$\ell_1: \ \underline{x} = k(2,-3,6)$$

$$\ell_2: \ \underline{x} = (3,-5,0) + t(2,-3,6)$$

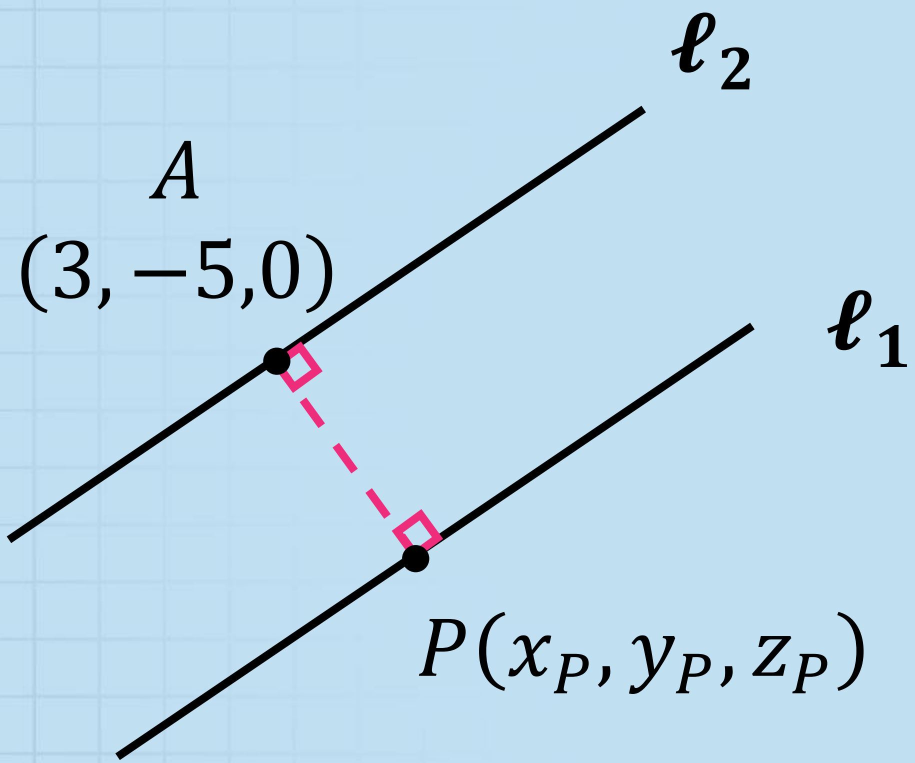
לשני הישרים אותו כיוון, אולם הנקודה $(0,0,0)$ שנמצאת על הישר ℓ_1 אינה נמצאת על הישר ℓ_2

$$\Downarrow$$

$$\ell_1 \parallel \ell_2$$

ד. (2) חשבו את המרחק בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2.

פתרון



מרחק בין ישרים מקבילים
מוגדר כאורך האנך המחבר ביניהם

נגדיר נקודה P על הישר ℓ_1 כך ש $PA \perp \ell_2$

נחשב את אורך האנך עפ״י מרחק בין
שתי נקודות, $A(3,-5,0)$ ו-P שנמצא

ד. (2) חשבו את המרחק בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2.

פתרון

נבטא את הנקודה P באמצעות הנקודה האופיינית של הישר ℓ_1:

$$P = (2k_P, -3k_P, 6k_P)$$

נמצא את k_P באמצעות הדרישה $AP \perp \ell_2$

$$\text{כיוון}_{\ell_2} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

ד. (2) חשבו את המרחק בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2.

פתרון

$$\text{כיוון}_{\ell_2} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = (2k_P - 3, -3k_P + 5, 6k_P)$$

$$\Downarrow$$

$$(2, -3, 6) \cdot (2k_P - 3, -3k_P + 5, 6k_P) = 0$$

$$4k_P - 6 + 9k_P - 15 + 36k_P = 0$$

ד. (2) חשבו את המרחק בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2.

פתרון

$$4k_P - 6 + 9k_P - 15 + 36k_P = 0$$

$$49k_P = 21$$

$$\boldsymbol{k_P = \frac{3}{7}}$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{AP} = (2k_P - 3, -3k_P + 5, 6k_P) = \left(\frac{-15}{7}, \frac{26}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

ד. (2) חשבו את המרחק בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2.

פתרון

המרחק בין הישרים:

$$d = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\left(\frac{-15}{7}\right)^2 + \left(\frac{26}{7}\right)^2 + \left(\frac{18}{7}\right)^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$$

בהצלחה