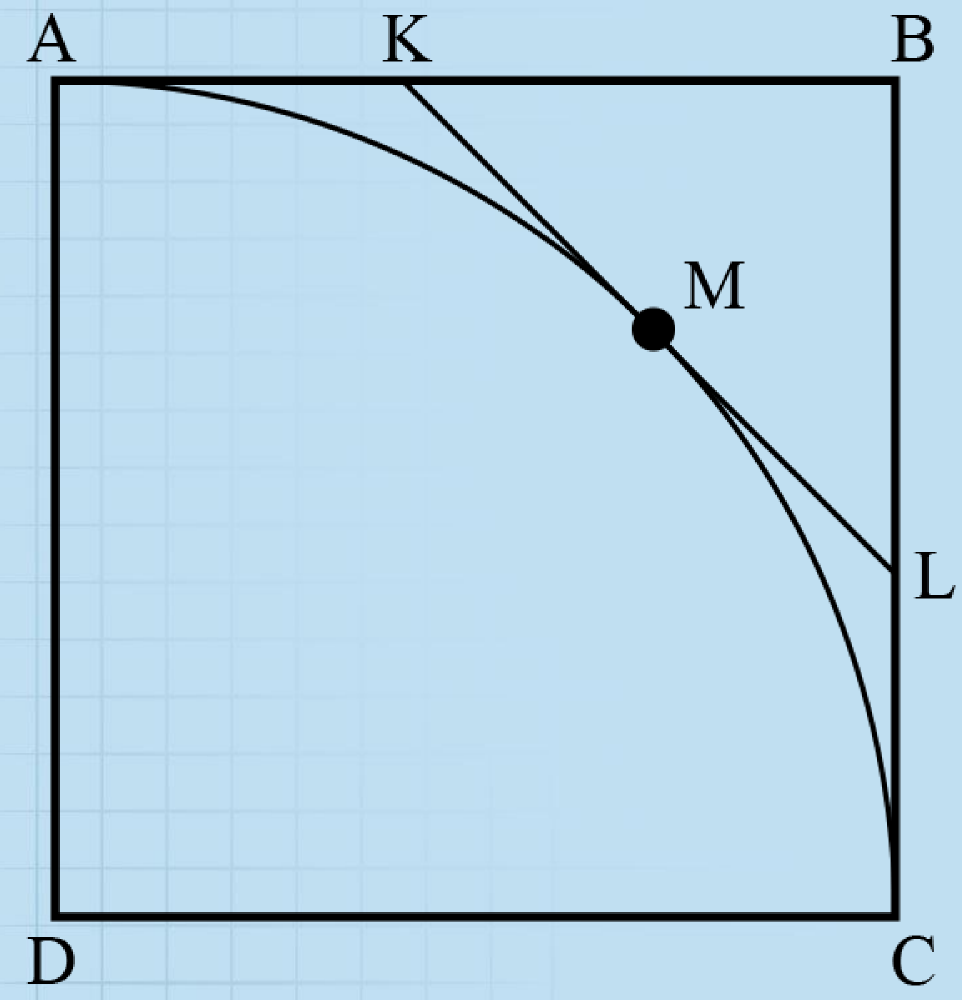
פתרון מתכונת

שאלה 8–מבחן 1

שאלון 581

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה



8) בתוך ריבוע $ABCD$ חסום רבע עיגול שרדיוסו R ומרכזו בנקודה D כמתואר בציור.

M היא נקודה על הקשת של רבע המעגל החסום.

דרך הנקודה M מעבירים משיק לרבע המעגל.

המשיק חותך את צלעות הריבוע AB ו-BC בנקודות K ו-L בהתאמה.

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

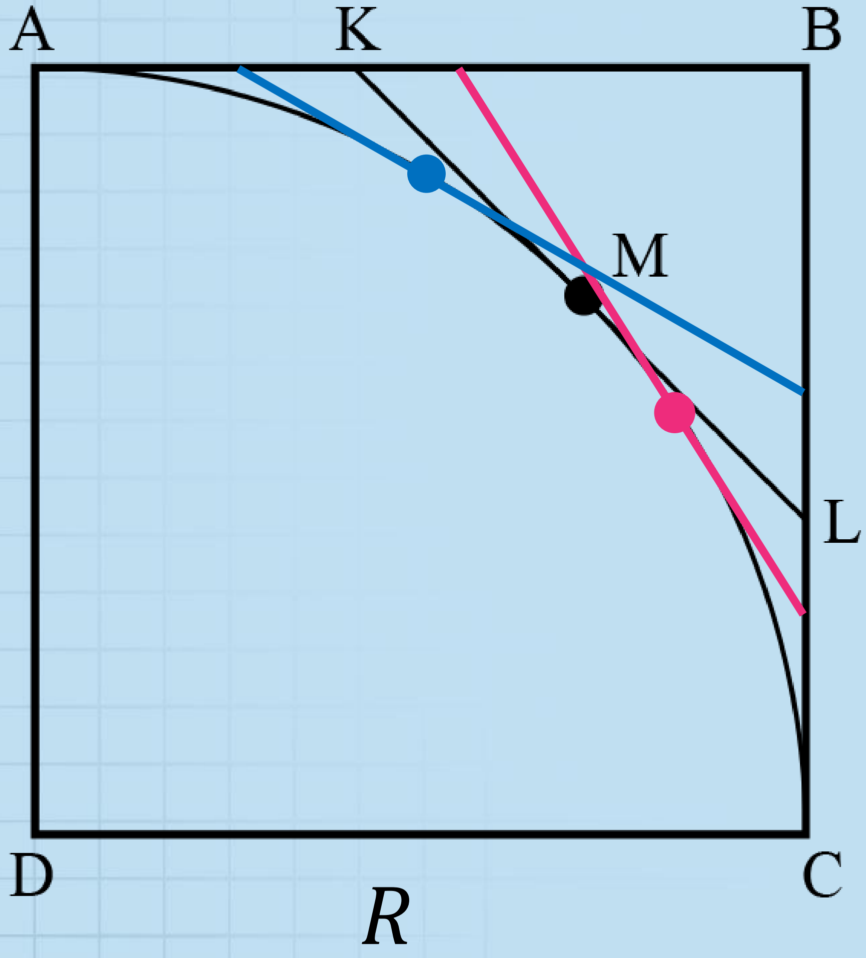
ב. הביעו באמצעות R את שטח המשולש BKL כאשר KL בעל אורך מינימלי.

ג. (1) הוכיחו, כאשר לקטע KL אורך מינימלי, הנקודה M נמצאת על האלכסון BD של הריבוע $ABCD$.

(2) חשבו את היחס $\frac{BM}{DM}$.

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון

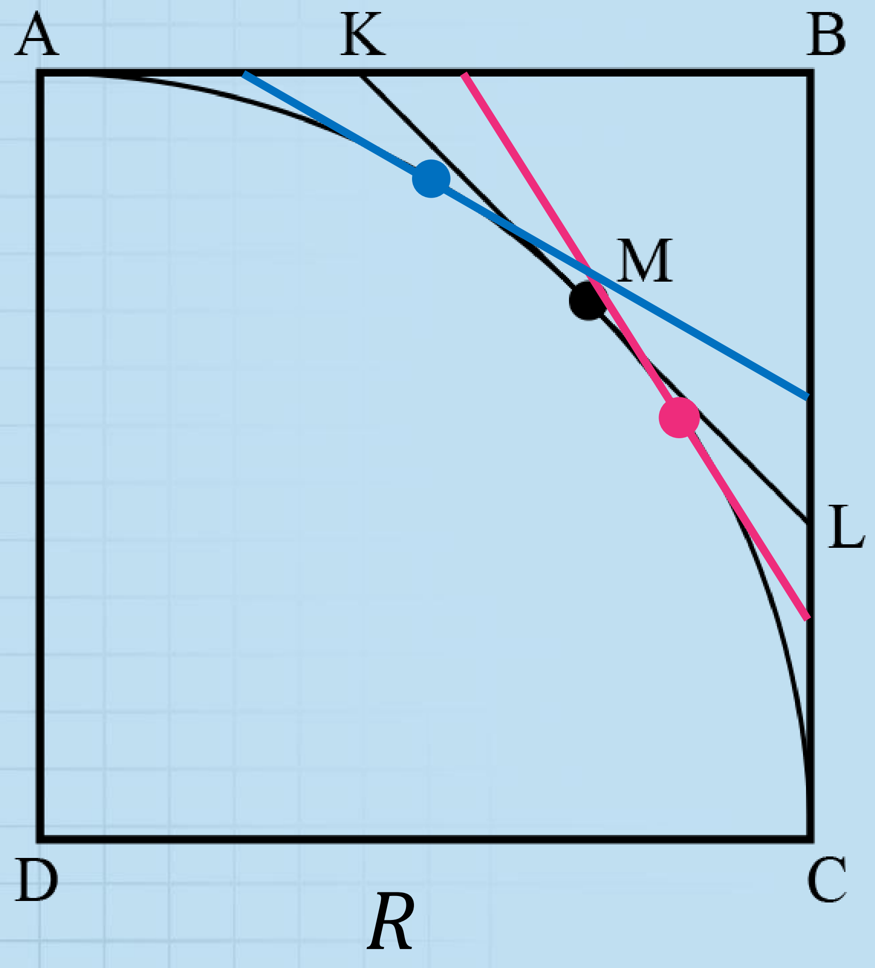


ננסה להבין דרכים אחרות לסרטט את נתוני השאלה

עלינו לבטא את אורכו המינימלי של הקטע KL באמצעות ה**פרמטר** R

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון

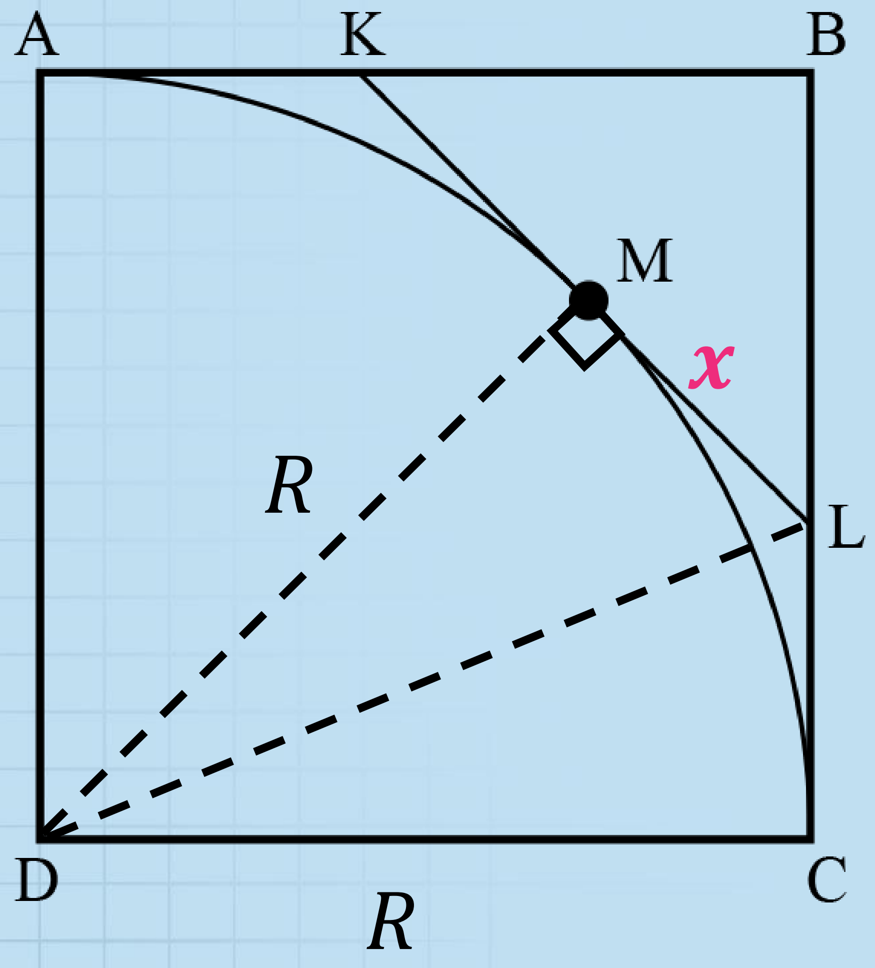


נבחר משתנה, נבטא באמצעותו את אורך הקטע ונמצא לפונקציה נקודת מינימום.

עלינו למצוא את **שיעור ה-y** של נקודת מינימום זו – זהו אורכו המינימלי של הקטע KL

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון



נסמן $ML = x > 0$

ב.ע. : $DM = R$ רדיוס במעגל

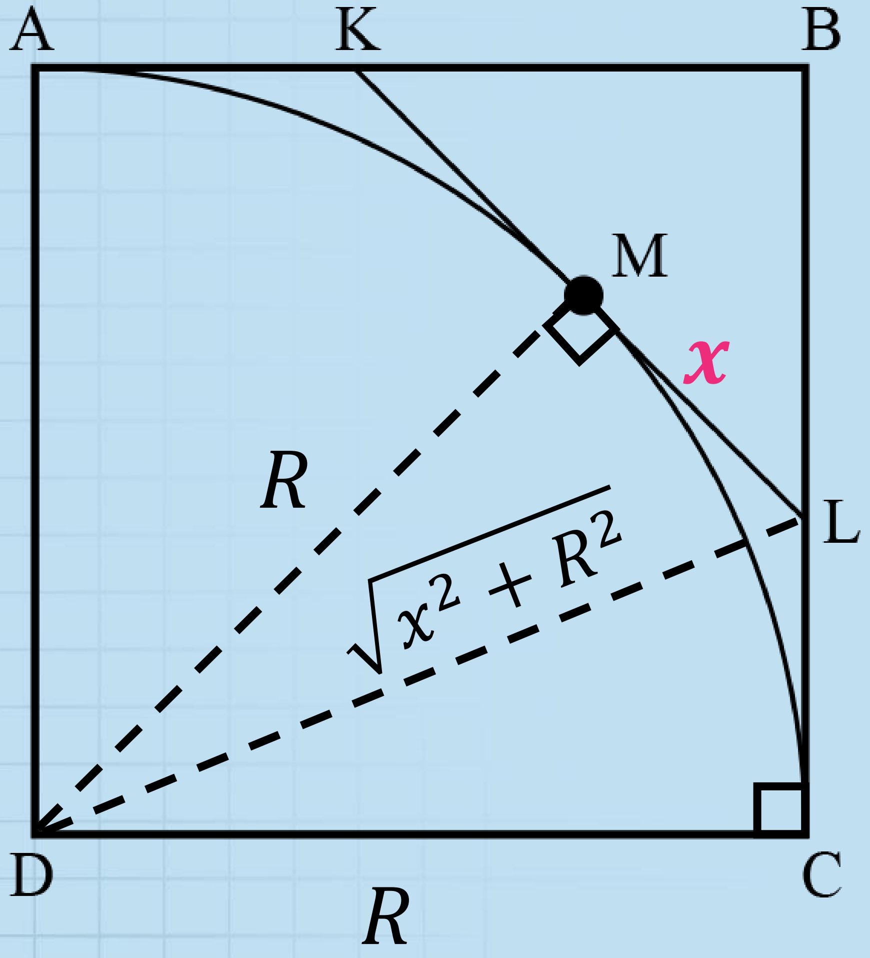
$\Downarrow$

$DM \perp KL$ רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה

ב.ע. : DL

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון



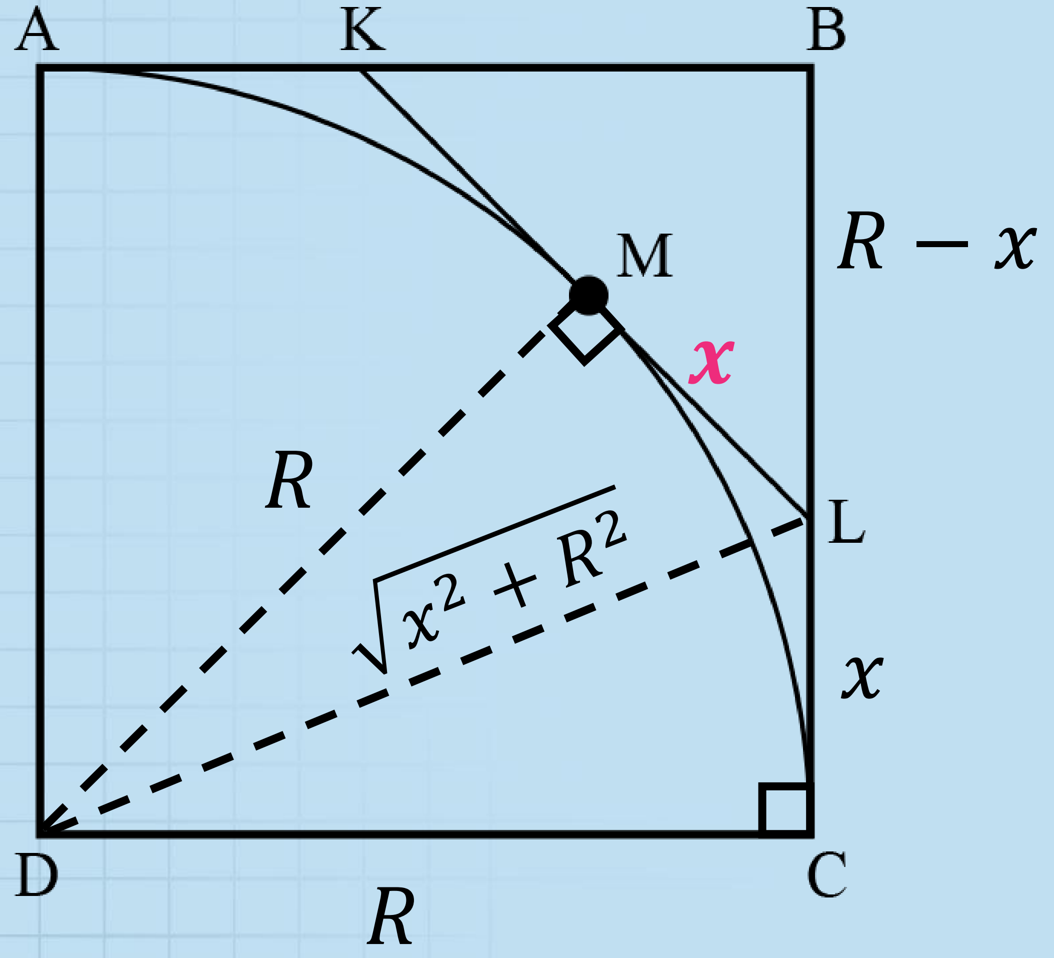
ΔDML ישו"ז

משפט פיתגורס: $DL=\sqrt{x^2+R^2}$

$\sphericalangle BCD=90^\circ$ זווית פנימית בריבוע $ABCD$ זווית ישרה

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון



ΔLCD ישו"ז

משפט פיתגורס:

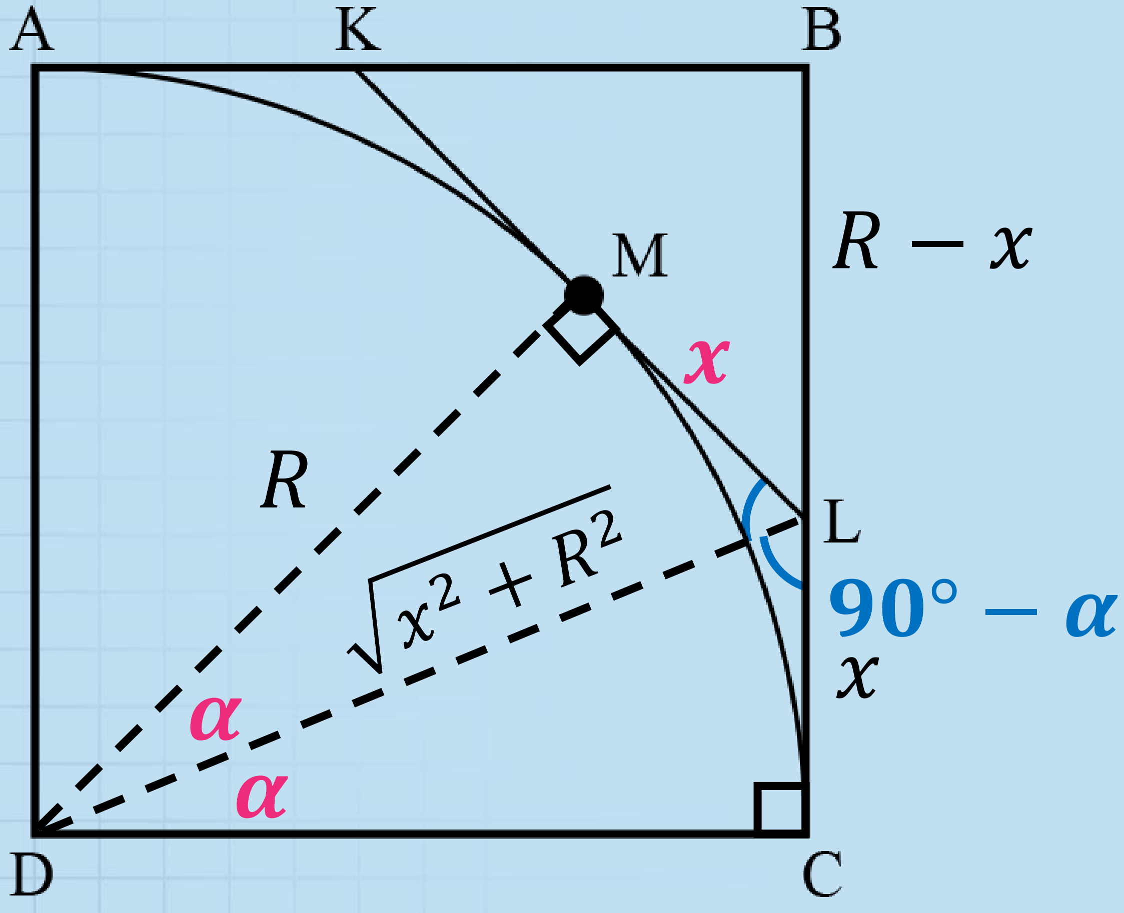
$$CL=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+R^2}\right)^2-R^2}=x$$

$$\Downarrow$$

$$BL=R-x$$

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון



נסמן $\sphericalangle MDL = \alpha$

$\Downarrow$

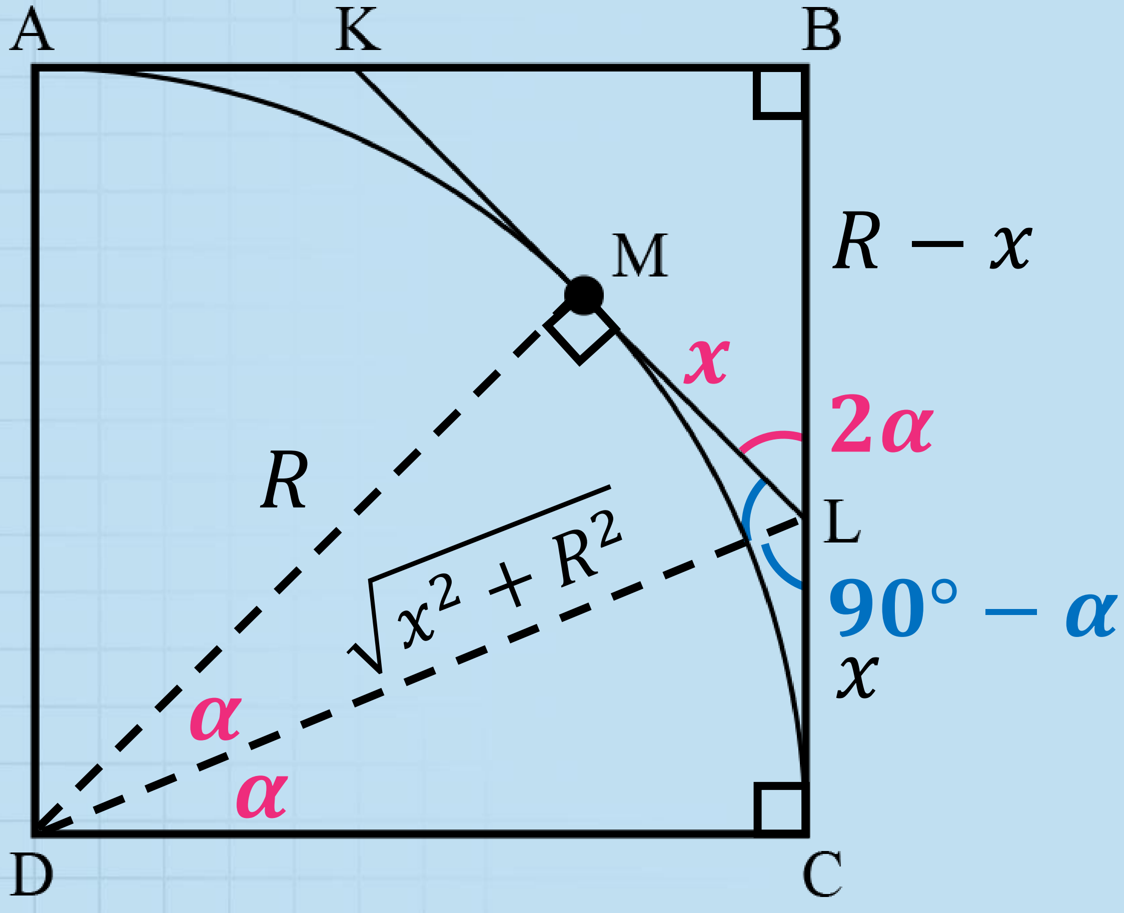
$\sphericalangle LDC = \alpha$ אלכסון ראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש

$\Downarrow$

$$\sphericalangle MLD = \sphericalangle CLD = 90° - \alpha$$

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון



⇓

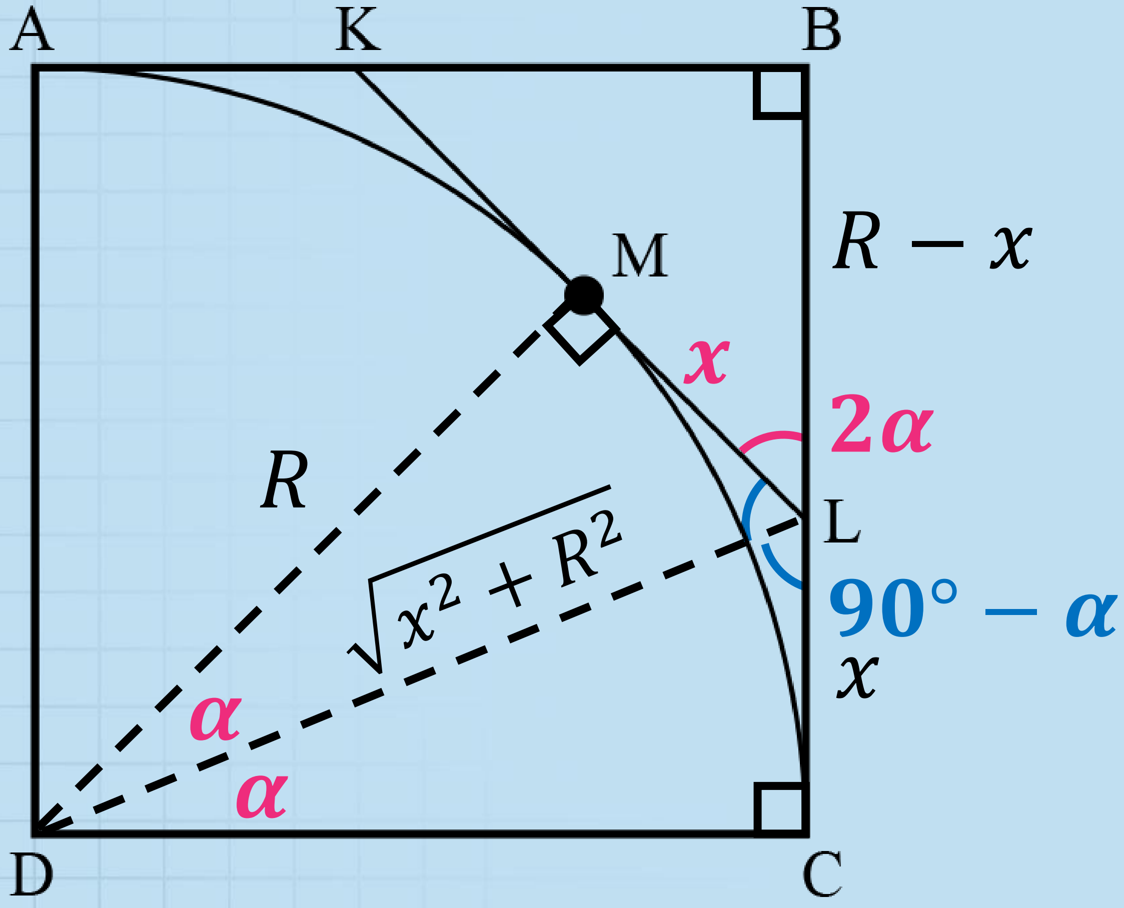
$\sphericalangle BLK = 2\alpha$

משלימה את $\sphericalangle BLC$ ל- $180°$

$\sphericalangle ABC = 90°$ זווית פנימית בריבוע $ABCD$ זווית ישרה

א.   הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון



ΔKBL ישו״ז

$$\cos 2\alpha = \frac{R-x}{KL}$$

ΔDML ישו״ז

$$\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R-x}{KL} = 2\left(\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)^2 - 1$$

$$\frac{R-x}{KL} = \frac{2R^2}{x^2+R^2} - 1$$

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL.

פתרון

$$\frac{R-x}{KL}=\frac{2R^2}{x^2+R^2}-1=\frac{2R^2-x^2-R^2}{x^2+R^2}=\frac{-x^2+R^2}{x^2+R^2}$$

$$KL=\frac{R-x}{\frac{R^2-x^2}{x^2+R^2}}=\frac{(R-x)(x^2+R^2)}{R^2-x^2}=\frac{(R-x)(x^2+R^2)}{(R+x)(R-x)}$$

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון

$$\boldsymbol{KL = f(x) = \frac{x^2 + R^2}{R + x}}$$

נמצא לפונקציה נקודת מינימום

נדרוש: $\boldsymbol{f'(x) = 0}$

$$f'(x) = \frac{2x(R + x) - (x^2 + R^2) \cdot 1}{(R + x)^2} = \frac{x^2 + 2Rx - R^2}{(R + x)^2} = 0$$

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון

$$x^2 + 2Rx - R^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2R \pm \sqrt{(2R)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-R^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2R \pm \sqrt{8R^2}}{2}$$

$$= \frac{-2R \pm 2\sqrt{2}R}{2} = -R \pm \sqrt{2}R$$

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL.

פתרון

עפ"י הגדרת המשתנה $x > 0$ ולכן יש נקודה אחת חשודה לקיצון:

$$x = -R + \sqrt{2}R = R\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי, ולכן
סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL.

פתרון

סימן הנגזרת השנייה בנקודה החשודה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(x^2+2Rx-R^2)'=2x+2R$$

$$x=R(\sqrt{2}-1) \qquad 2R(\sqrt{2}-1)+2R>0$$

עבור $x=R(\sqrt{2}-1)$ נקודת מינימום

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

פתרון

$$\boldsymbol{KL = f(x) = \frac{x^2 + R^2}{R + x}}$$

$$KL_{min} = f\left(R\left(\sqrt{2} - 1\right)\right) = \frac{\left(R\left(\sqrt{2} - 1\right)\right)^2 + R^2}{R + R\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

$$= \frac{\left(3 - 2\sqrt{2}\right)R^2 + R^2}{\sqrt{2}R} = \frac{\left(4 - 2\sqrt{2}\right)R^2}{\sqrt{2}R} = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)R}{\sqrt{2}}$$

א. הביעו באמצעות R את האורך המינימלי לקטע KL .

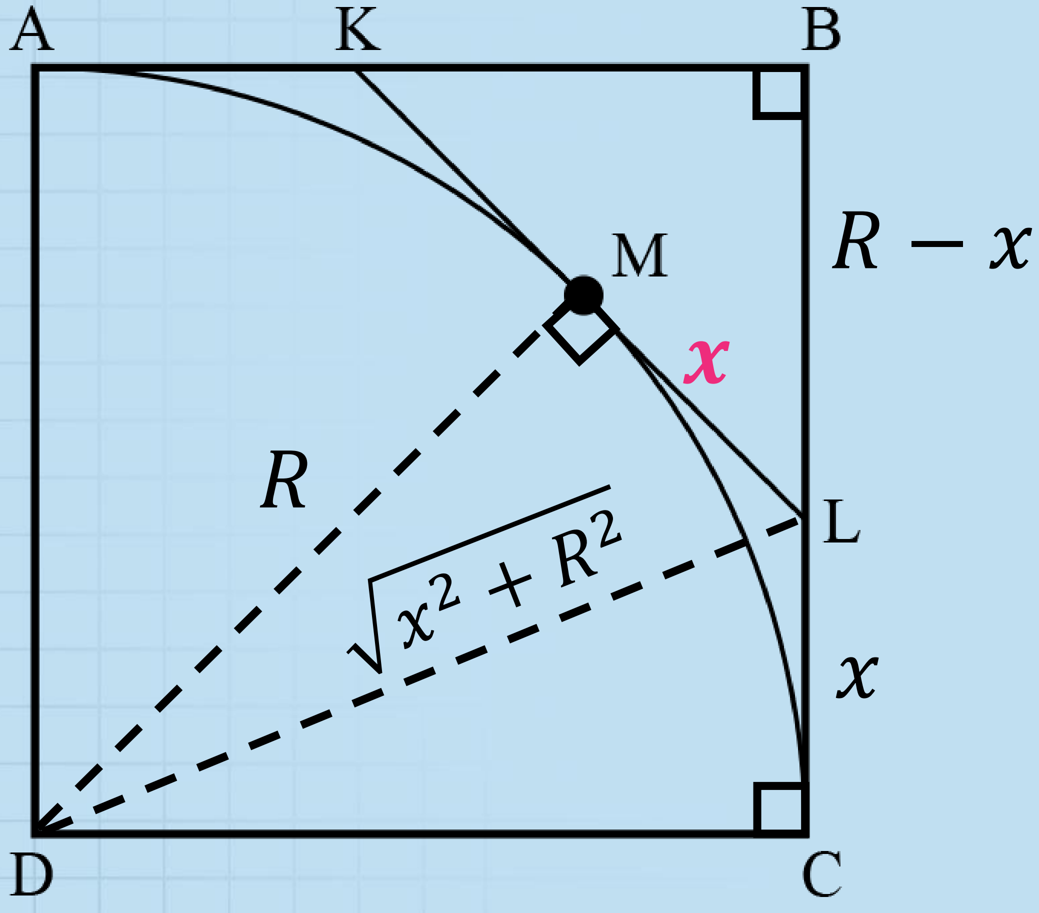
פתרון

האורך המינימלי של הקטע KL , באמצעות הפרמטר R

$$KL_{min} = 2R\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

ב. הביעו באמצעות R את שטח המשולש BKL כאשר KL בעל אורך מינימלי.

פתרון



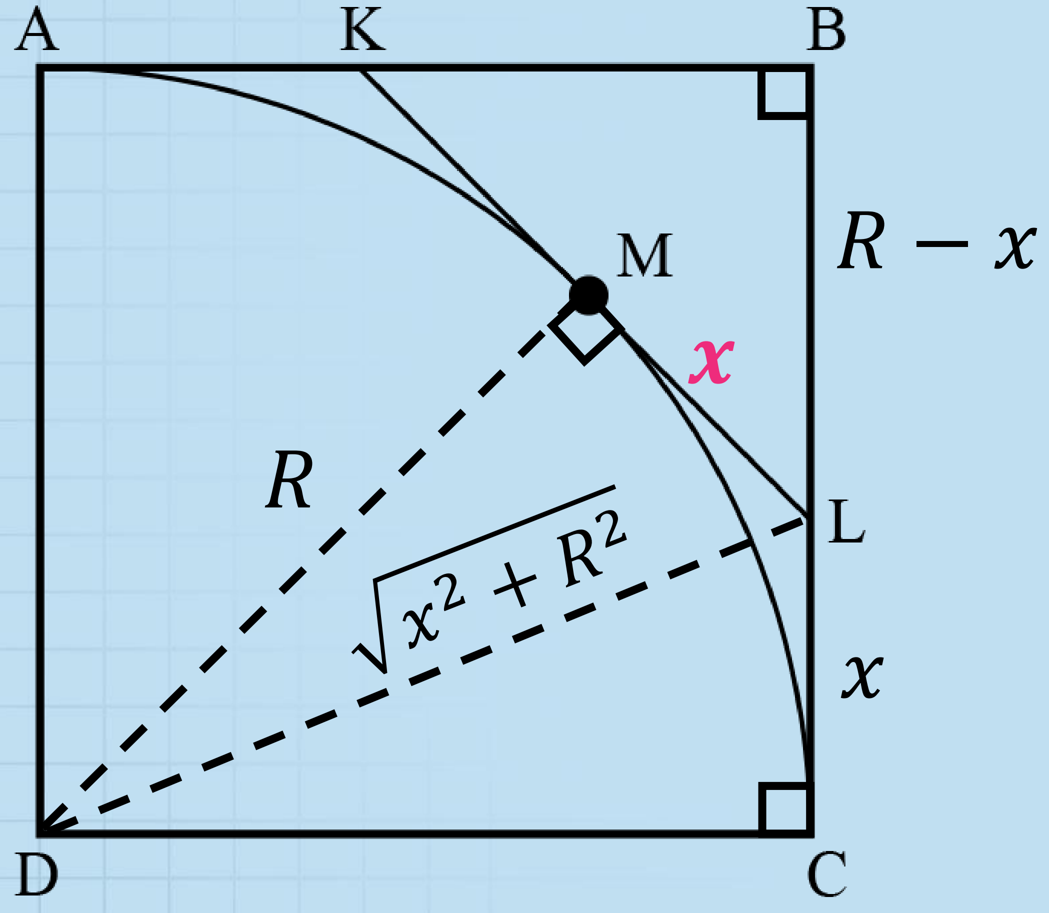
$$KL_{min} = 2R\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$ML = x_{min} = R\left(\sqrt{2}-1\right)$$

ב. הביעו באמצעות R את שטח המשולש BKL כאשר KL בעל אורך מינימלי.

פתרון



$$S_{\Delta BKL} = \frac{BL \cdot KB}{2}$$

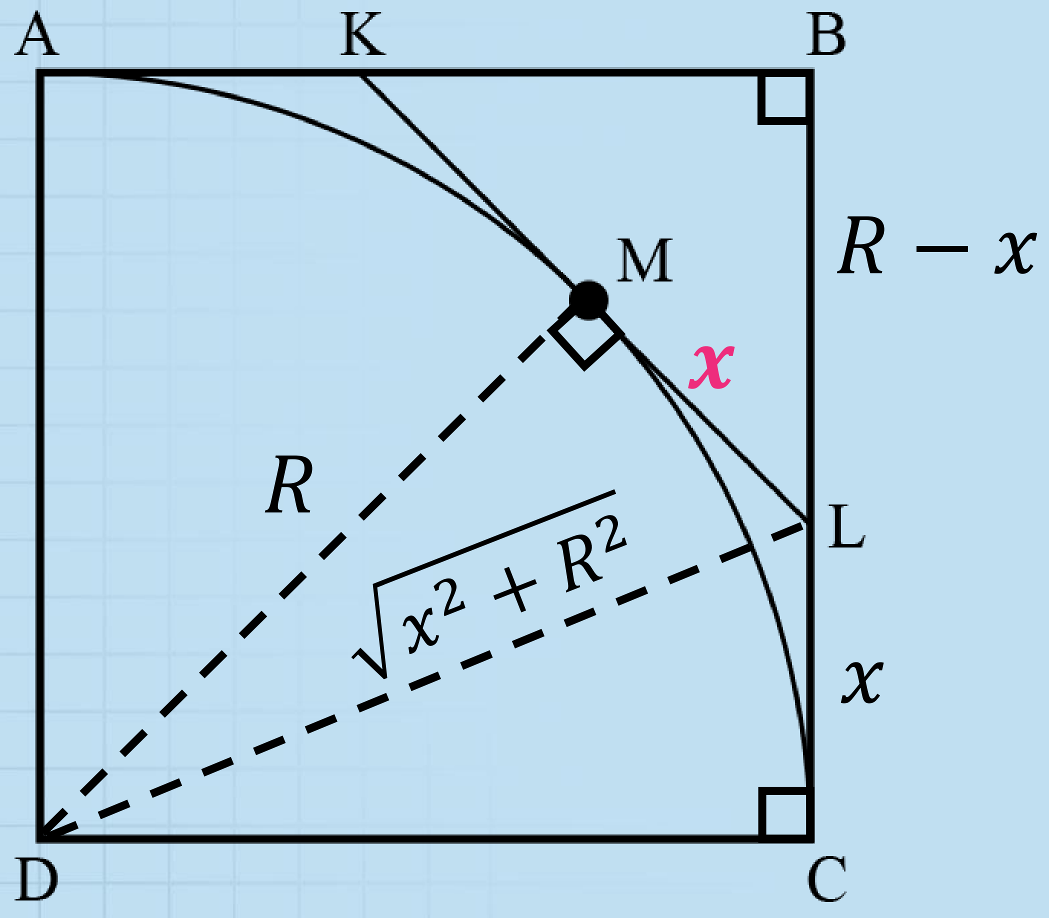
$$BL = R - x_{min}$$

$$= R - R\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$= R\left(2 - \sqrt{2}\right) = 0.586R$$

ב. הביעו באמצעות R את שטח המשולש BKL כאשר KL בעל אורך מינימלי.

פתרון



ΔKBL יש"ז משפט פיתגורס:

$$BK=\sqrt{{KL_{min}}^2-BL^2}$$

$$=\sqrt{\left(2R(\sqrt{2}-1)\right)^2-\left(R(2-\sqrt{2})\right)^2}$$

ב. הביעו באמצעות R את שטח המשולש BKL כאשר KL בעל אורך מינימלי.

פתרון

$$BK=\sqrt{\left(2R\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2-\left(R\left(2-\sqrt{2}\right)\right)^2}$$

$$=\sqrt{4R^2\left(3-2\sqrt{2}\right)-R^2\left(6-4\sqrt{2}\right)}=\sqrt{R^2\left(6-4\sqrt{2}\right)}$$

$$=R\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\mathbf{0.586R}$$

ב. הביעו באמצעות R את שטח המשולש BKL כאשר KL בעל אורך מינימלי.

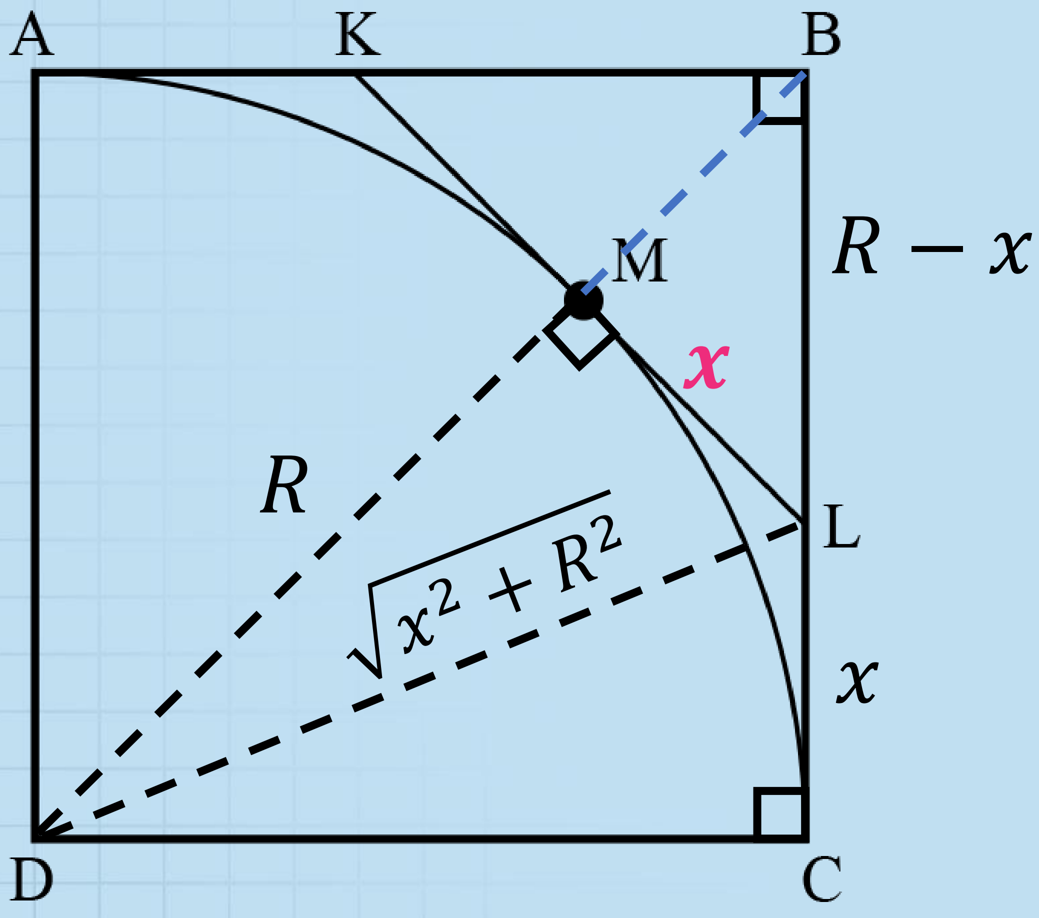
פתרון

$\Downarrow$

$$S_{\Delta BKL}=\frac{BL\cdot KB}{2}=\frac{R\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot R\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2}=\mathbf{0.1715R^2}$$

ג. (1) הוכיחו, כאשר לקטע KL אורך מינימלי, הנקודה M נמצאת על האלכסון BD של הריבוע ABCD.

פתרון



צ.ל. M על הישר BD

$\Downarrow$

נוכיח $\sphericalangle DMB = 180°$

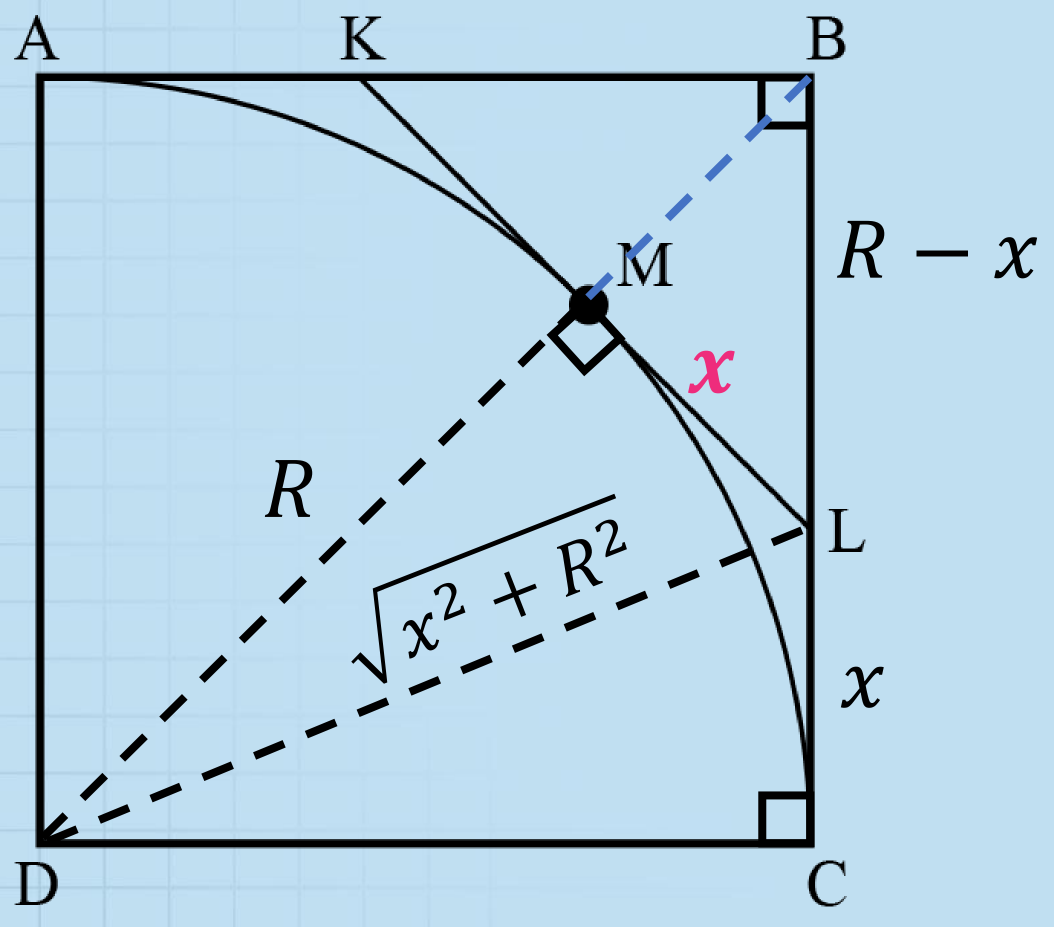
$\sphericalangle DMB = \sphericalangle DML + \sphericalangle LMB$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{צ.ל. } \sphericalangle LMB = 90°}$

ג. (1) הוכיחו, כאשר לקטע KL אורך מינימלי, הנקודה M נמצאת על האלכסון BD של הריבוע ABCD.

פתרון



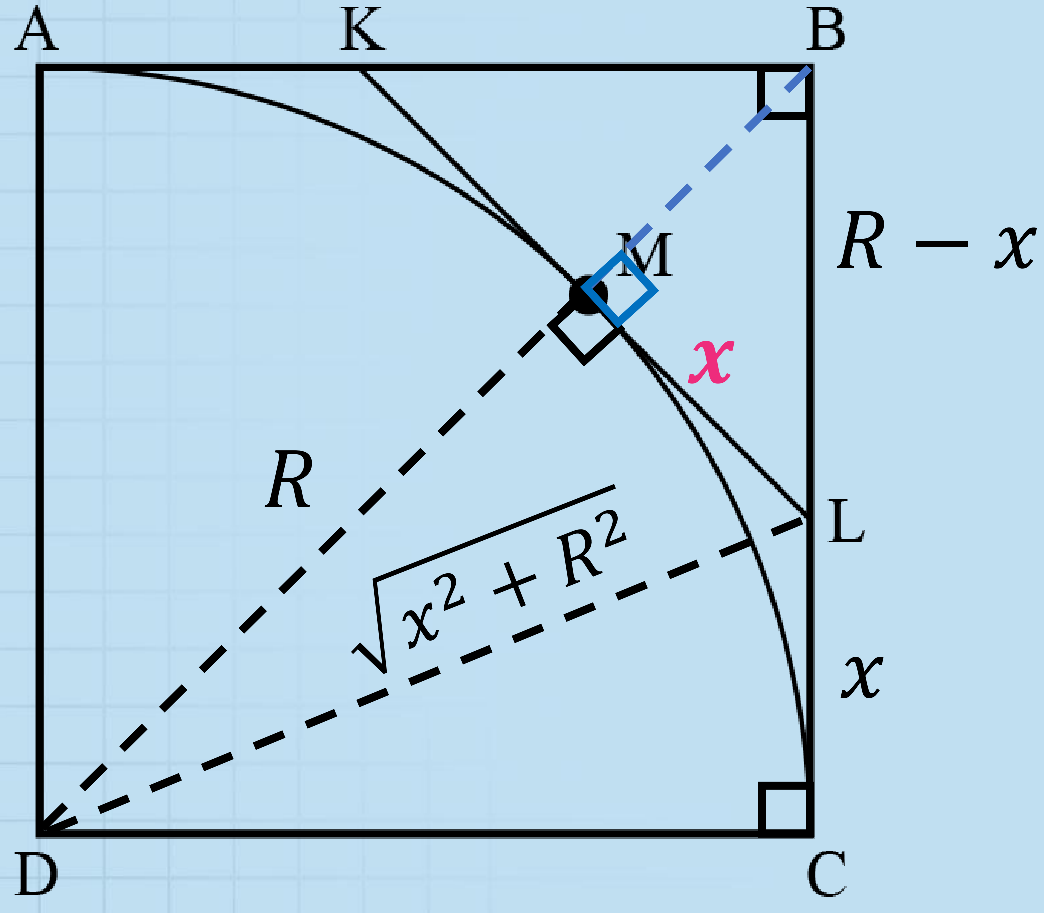
$$KL_{min} = 2R\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$ML = x_{min} = R\left(\sqrt{2}-1\right)$$

כאשר אורך הקטע KL מינימלי
M אמצע KL, BM תיכון ל- KL

ג. (1) הוכיחו, כאשר לקטע KL אורך מינימלי, הנקודה M נמצאת על האלכסון BD של הריבוע ABCD.

פתרון



עפ"י סעיף ב':

$$BK = BL = 0.586R$$

$$\Downarrow$$

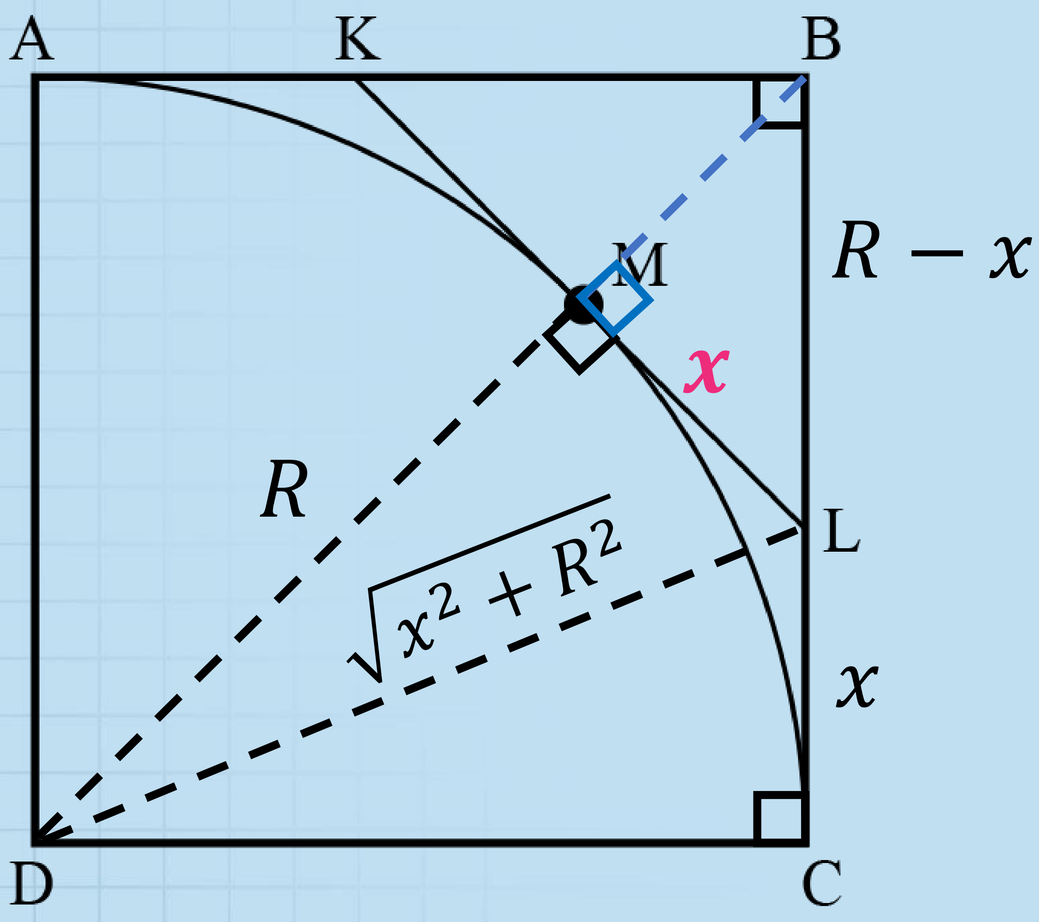
ΔKBL ש"ש

$$\Downarrow$$

BM תיכון לבסיס במש"ש,
מתלכד עם גובה לבסיס

ג. (1) הוכיחו, כאשר לקטע KL אורך מינימלי, הנקודה M נמצאת על האלכסון BD של הריבוע ABCD.

פתרון



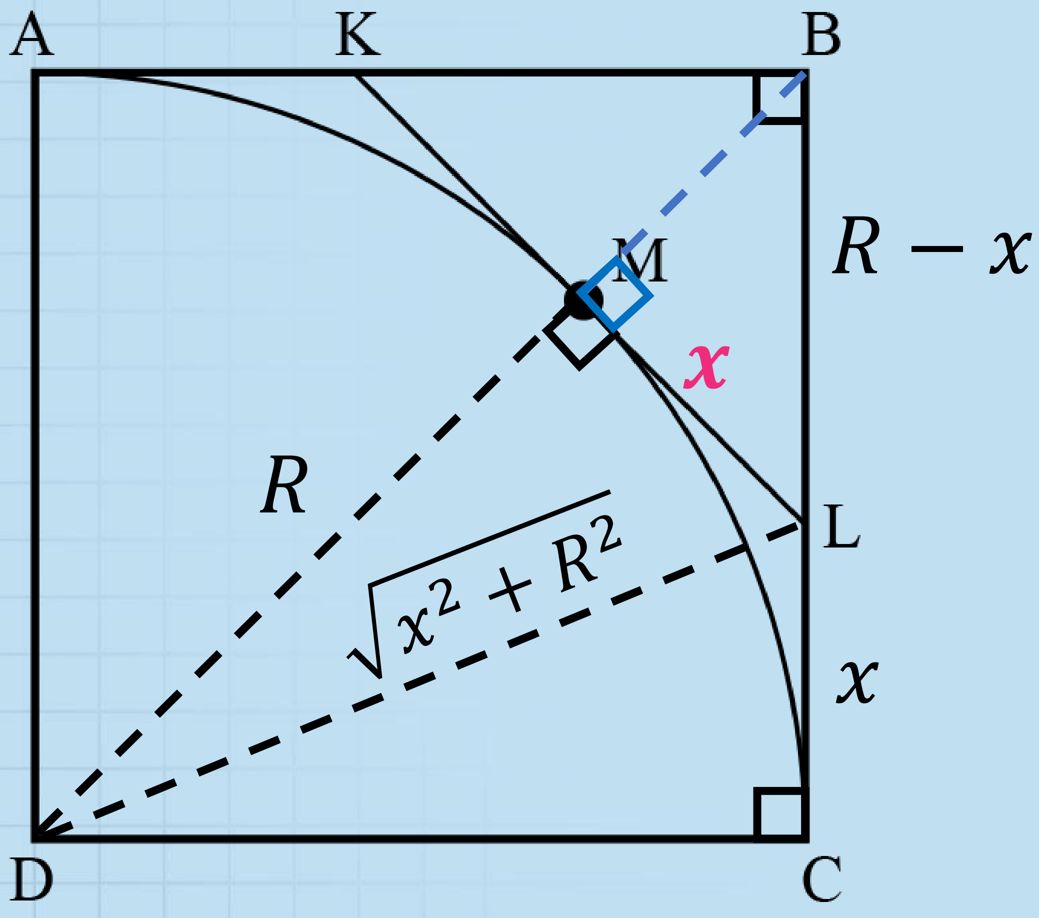
$\Downarrow$

$$\boxed{\measuredangle LMB = 90°}$$

הנקודה M על האלכסון BD

(2) חשבו את היחס $\frac{BM}{DM}$.

פתרון



אלכסוני הריבוע חוצי זווית

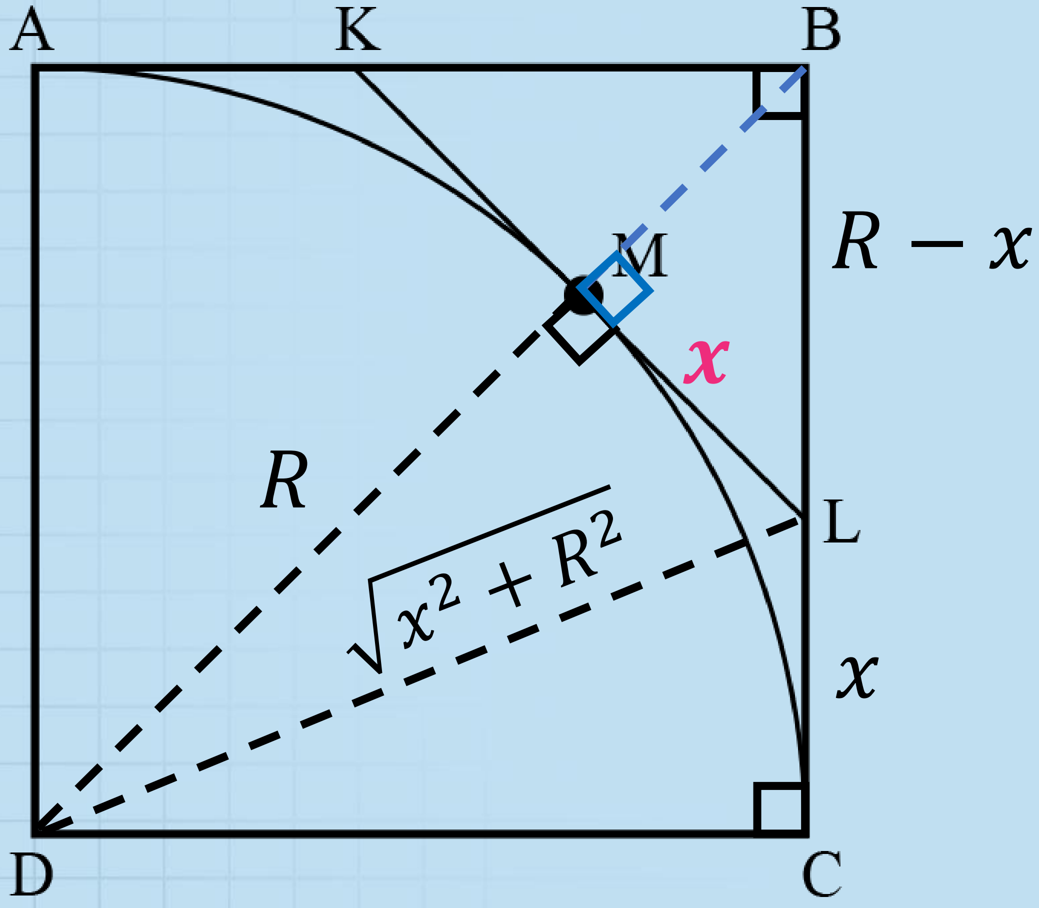
משולש ΔBML ש״ש ויש״ז

$$\Downarrow$$

$$BM = ML$$

(2) חשבו את היחס $\frac{BM}{DM}$.

פתרון



$$\frac{BM}{DM}=\frac{ML}{DM}=\frac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{R}$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)$$

בהצלחה