פתרון מתכונת

שאלה 7–מבחן 1

שאלון 581

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה

7) נתונה הפונקציה $f(x)=2\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ המוגדרת

בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{3}$.

א. הוכיחו כי קיימים שני פרמטרים a ו- b כך ש:

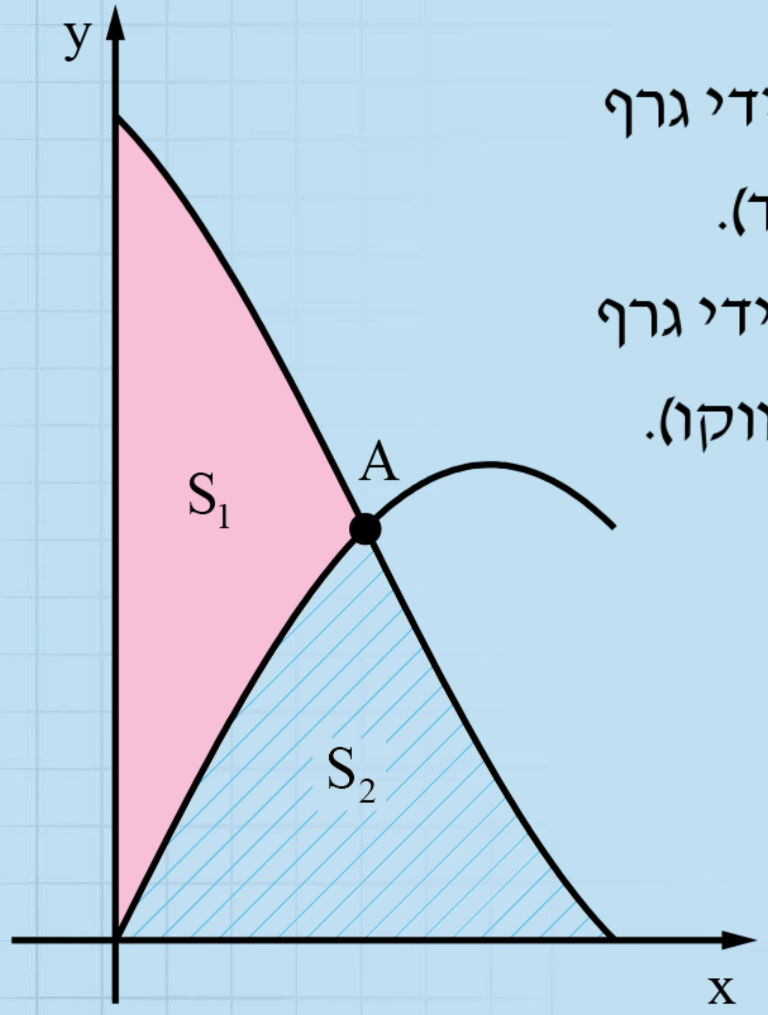
$f(x)=a\left(1+\cos 2x\right)+b\sin 2x$. ומצאו את ערכם

ב. גרף הפונקציה $g(x)=\sin\left(mx\right)$ חותך את גרף

הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת

הפיתול שלה בתחום הנתון.

השאלה



ג. נסמן: S_1 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה-y (השטח הורוד).

S_2 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה-x (השטח המקווקו).

הוכיחו: $S_1 = S_2$.

$f(x) = 2\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad .0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

א. $.f(x) = a(1 + \cos 2x) + b \sin 2x$

פתרון

עפ"י נוסחת סכום זוויות של פונקציית הקוסינוס:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x \cdot cos\frac{\pi}{6} - \sin x \cdot sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x \cdot \frac{1}{2}$$

$f(x) = 2\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.

א. $f(x) = a(1 + \cos 2x) + b \sin 2x$.

פתרון

$$f(x) = 2\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$= \sqrt{3}\underbrace{\cos^2 x} - \underbrace{\sin x \cos x}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \cos^2\alpha$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{2} = \sin\alpha\cos\alpha$$

$f(x)=2\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ $.0\le x\le\frac{\pi}{3}$

א. $f(x)=a(1+\cos 2x)+b\sin 2x$.

פתרון

$$f(x)=\sqrt{3}\cos^2 x-\sin x\cos x$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right)-\frac{\sin 2x}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$f(x) = 2\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad$ $.0 \le x \le \frac{\pi}{3}$

א. $f(x) = a(1+\cos 2x) + b\sin 2x$.

פתרון

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad b = -\frac{1}{2}$$

ב. גרף הפונקציה $g(x)=\sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m $(1<m<3)$.

פתרון

נמצא את שיעורי נקודת הפיתול של $f(x)$.
הצבת שיעורי הנקודה בפונקציה $g(x)$ תניב פסוק אמת

נדרוש: $f''(x)=0$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+cos\,2x)-\frac{1}{2}sin\,2x$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\,sin\,2x)\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot cos\,2x\cdot 2$$

ב. גרף הפונקציה $g(x) = \sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m $(1 < m < 3)$.

פתרון

$$f'(x) = -\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

$$f''(x) = -\sqrt{3}\cos 2x \cdot 2 - (-\sin 2x) \cdot 2$$

$$= -2\sqrt{3}\cos 2x + 2\sin 2x = 0$$

$$-\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 0$$

ב. גרף הפונקציה $g(x)=\sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m $(1<m<3)$.

פתרון

$$-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=0 \qquad /\div \cos 2x\neq 0$$

המקרה בו $\cos 2x=0$
אינו מהווה פתרון למשוואה

$$-\sqrt{3}+tg\,2x=0$$

$$tg\,2x=\sqrt{3}\quad =tg\frac{\pi}{3}$$

$$2x=\frac{\pi}{3}+\pi k$$

ב. גרף הפונקציה $g(x)=\sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m $(1<m<3)$.

פתרון

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$$

נחולל פתרונות בתחום השאלה, $0\le x\le\frac{\pi}{3}$

$$x=\frac{\pi}{6}$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות ערך הנגזרת השלישית $f'''(x)$

ב. גרף הפונקציה $g(x)=\sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m $(1<m<3)$.

פתרון

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות ערך הנגזרת השלישית $f'''(x)$

$$f'''(x)=\left(-2\sqrt{3}\,cos\,2x+2\,sin\,2x\right)'=4\sqrt{3}\,sin\,2x+4\,cos\,2x$$

$$x=\frac{\pi}{6} \qquad f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)\neq 0$$

עבור $x=\frac{\pi}{6}$ לפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול

ב. גרף הפונקציה $g(x)=\sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m $(1<m<3)$.

פתרון

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

ב. גרף הפונקציה $g(x) = \sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m $(1 < m < 3)$.

פתרון

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(m \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$(1) \quad m \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$(2) \quad m \cdot \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$

ב. גרף הפונקציה $g(x)=\sin(mx)$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A, שהיא נקודת הפיתול שלה בתחום הנתון. מצאו את ערכו של m $(1<m<3)$.

פתרון

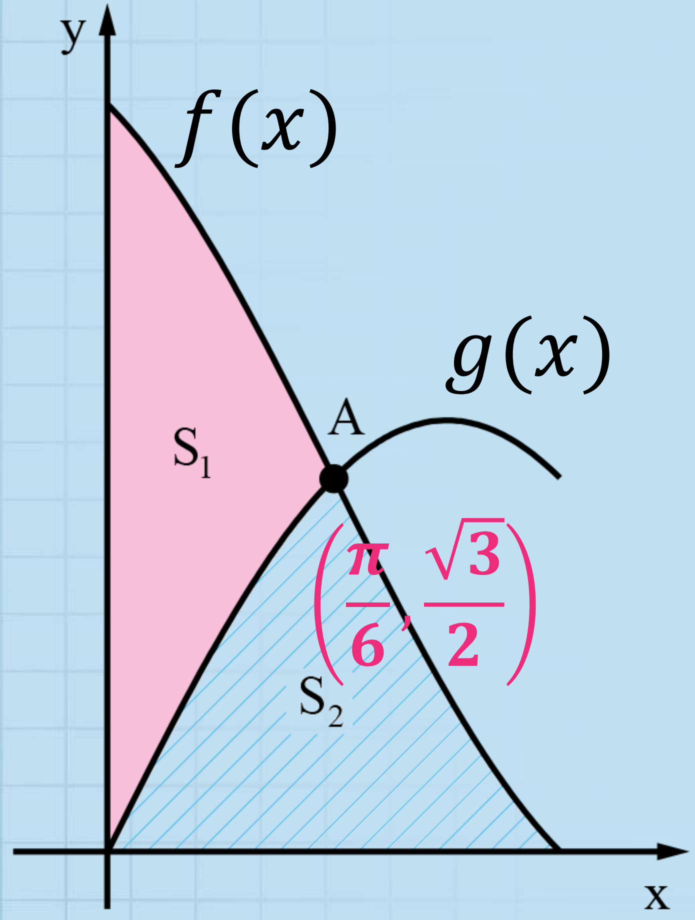
פתרונות בתחום השאלה, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, יתקבלו רק מאופציה (1)
עבור $k = 0$

$$m \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{m = 2}$$

הוכיחו: $S_1 = S_2$

פתרון



S_1 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה-y (השטח הורוד).

S_2 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה-x (השטח המקווקו).

הוכיחו: $S_1 = S_2$

פתרון

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (f(x) - g(x))dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + cos\,2x) - \frac{1}{2}sin\,2x - \sin 2x\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + cos\,2x) - \frac{3}{2}sin\,2x\right)dx$$

הוכיחו: $S_1 = S_2$

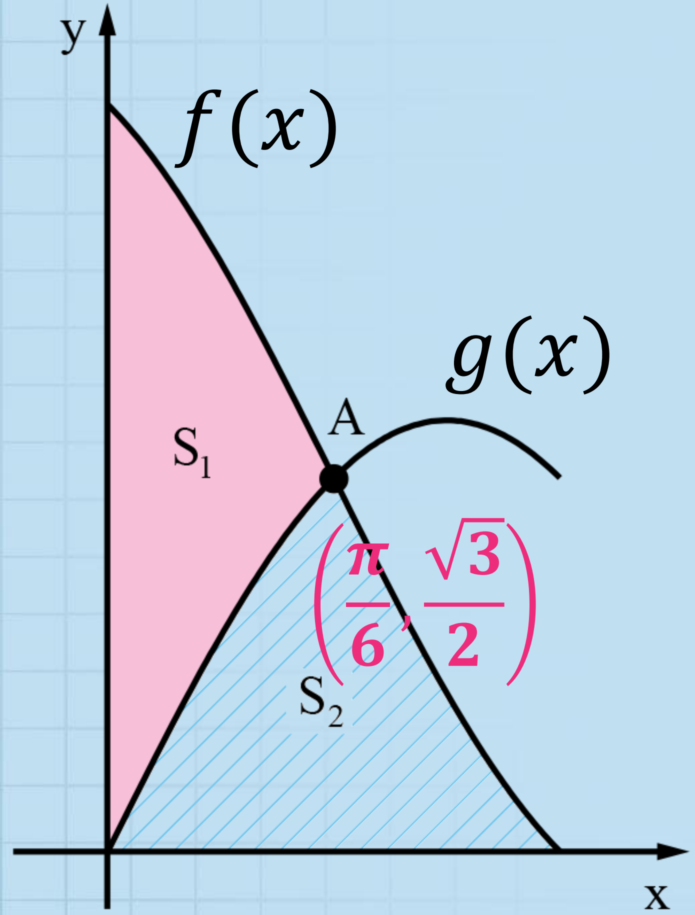
פתרון

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos 2x) - \frac{3}{2}\sin 2x\right) dx$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

הוכיחו: $S_1 = S_2$

פתרון



חיתוך הפונקציה $f(x)$ עם ציר x

בקצה התחום $x = \frac{\pi}{3}$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx - S_1$$

פתרון

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+cos\,2x) - \frac{1}{2}sin\,2x\right)dx$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \frac{sin\,2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{cos\,2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

הוכיחו: $S_1 = S_2$

פתרון

$\Downarrow$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx - S_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{12}\pi = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}\pi}$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{S_1 = S_2}$$

בהצלחה