פתרון מתכונת

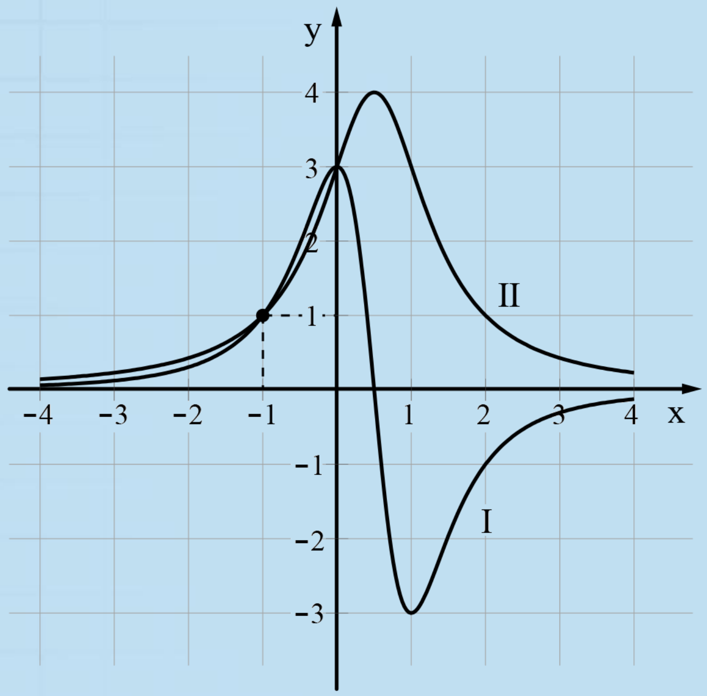
שאלה 6–מבחן 1

שאלון 581

המצגת נערכה ע״י שירי דוברין

השאלה

6) בציור מתוארים שני גרפים: גרף I וגרף II. אחד מהגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$,
האחר הוא של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.
שתי הפונקציות מוגדרות לכל x.



א. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f'(x)$. נמקו.

ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=-1$.

ג. (1) מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$.

(4) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^1 f'(x)dx$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g(x)=\int_{-1}^{x}[f'(x)-f(x)]dx$ בתחום $-1<x<0$.

קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה:

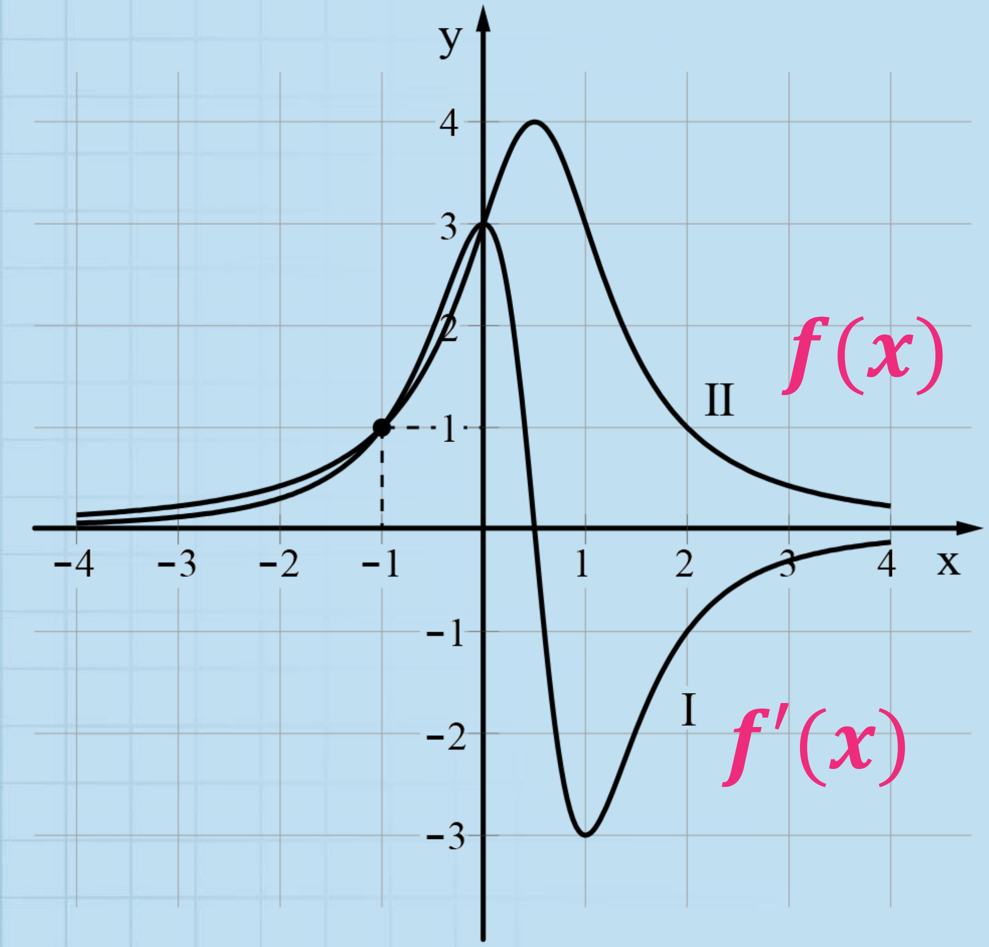
(1) הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה יורדת בתחום $-1<x<0$.

(2) הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה עולה בתחום $-1<x<0$.

(3) לא ניתן לקבוע אם הפונקציה $g(x)$ עולה או יורדת.

א. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f'(x)$. נמקו.

פתרון



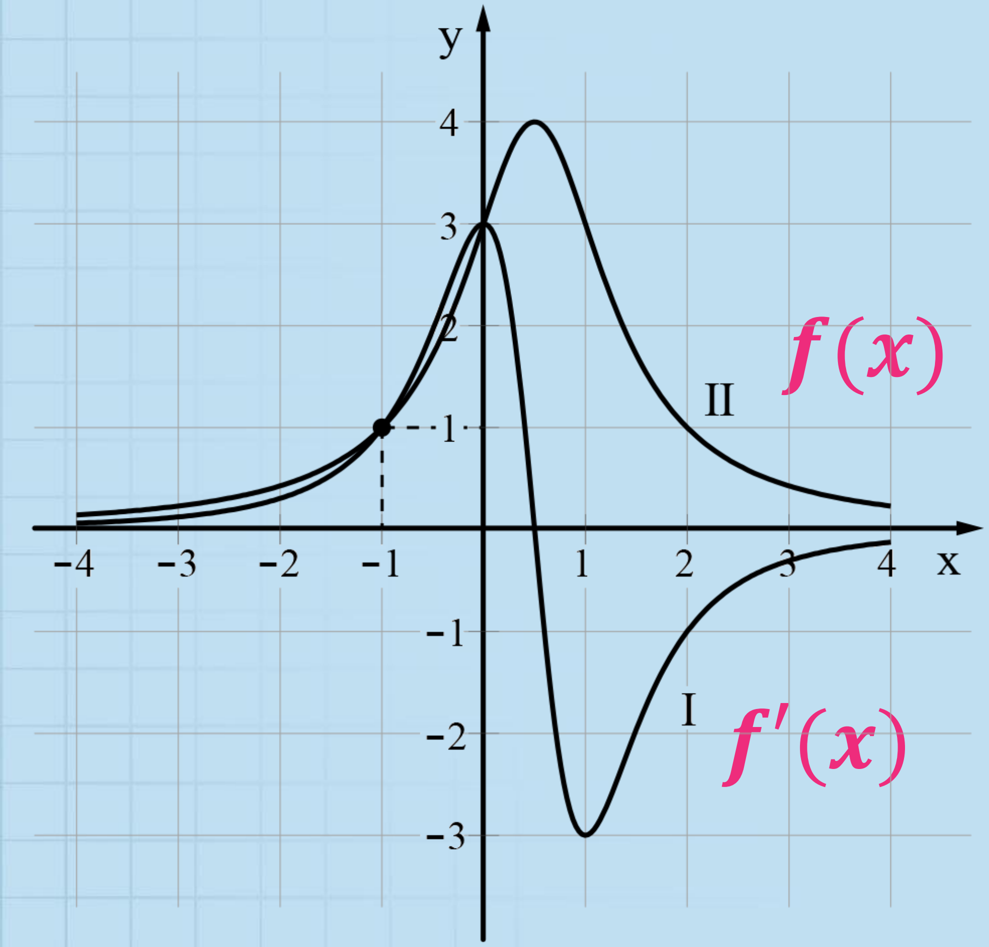
כאשר לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון
גרף הנגזרת $f'(x)$ יחתוך את ציר x

בנקודה $x = 1$ לגרף (1) נקודת קיצון
אבל גרף (2) **אינו** חותך את ציר ה- x

גרף הפונקציה $f(x)$ מתואר ע"י גרף (2)
גרף הנגזרת $f'(x)$ מתואר ע"י גרף (1)

ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=-1$.

פתרון



שיפוע המשיק לפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה:

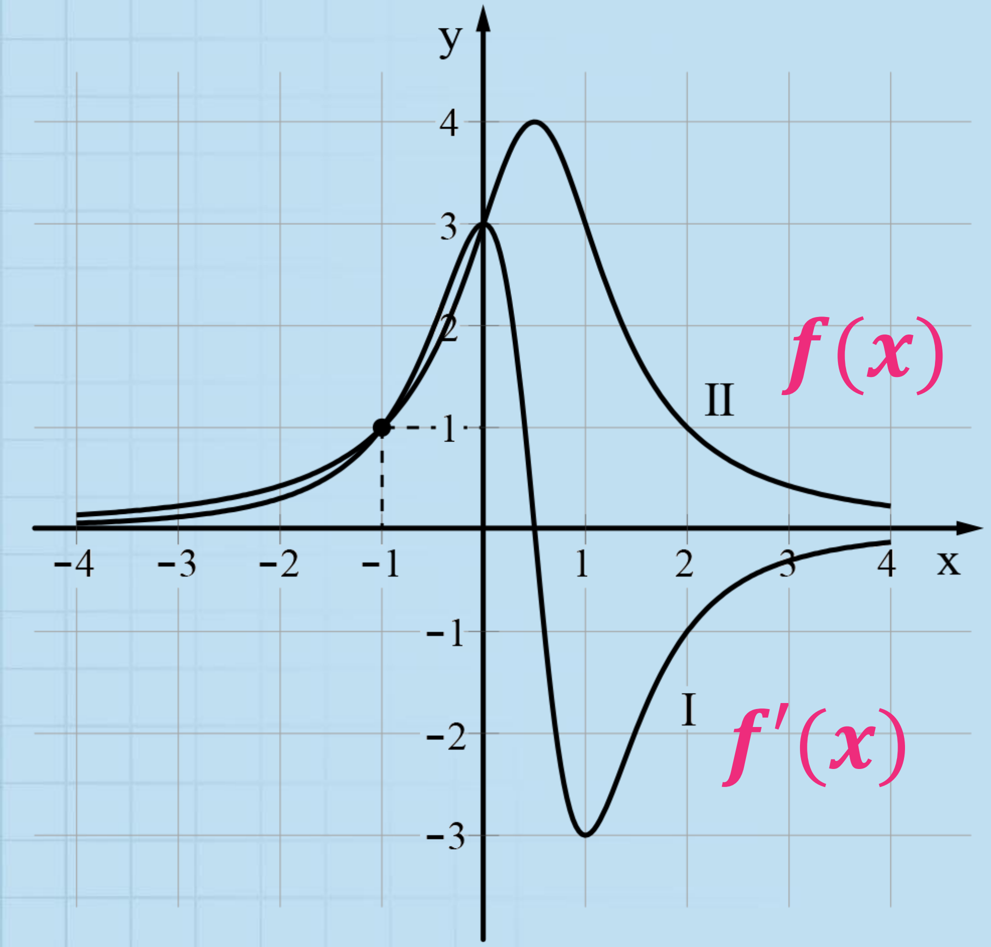
$$m = f'(-1) = 1$$

נקודת ההשקה, באמצעות הפונקציה

$$\big(-1, f(-1)\big) = (-1,1)$$

ב. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=-1$.

פתרון



משוואת משיק ששיפועו $m=1$

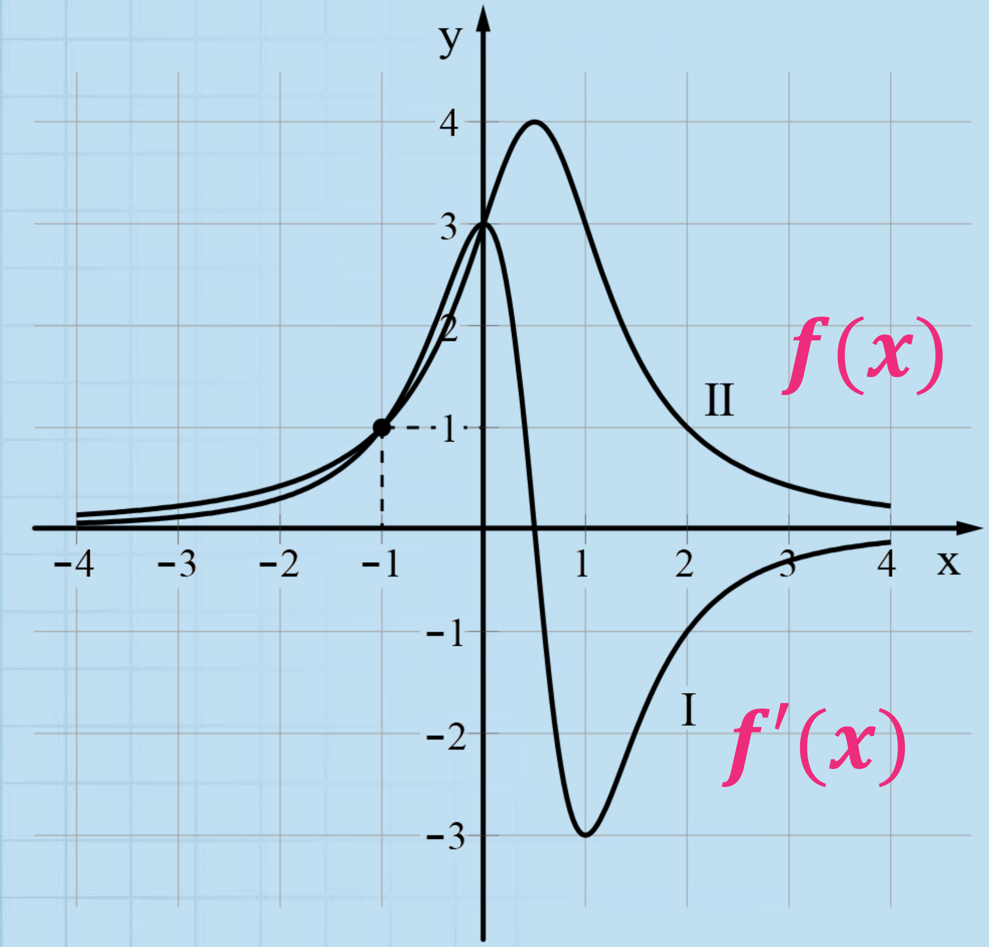
העובר דרך הנקודה $(-1,1)$

$$y-1=1(x+1)$$

$$y=x+2$$

ג. (1) מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

פתרון



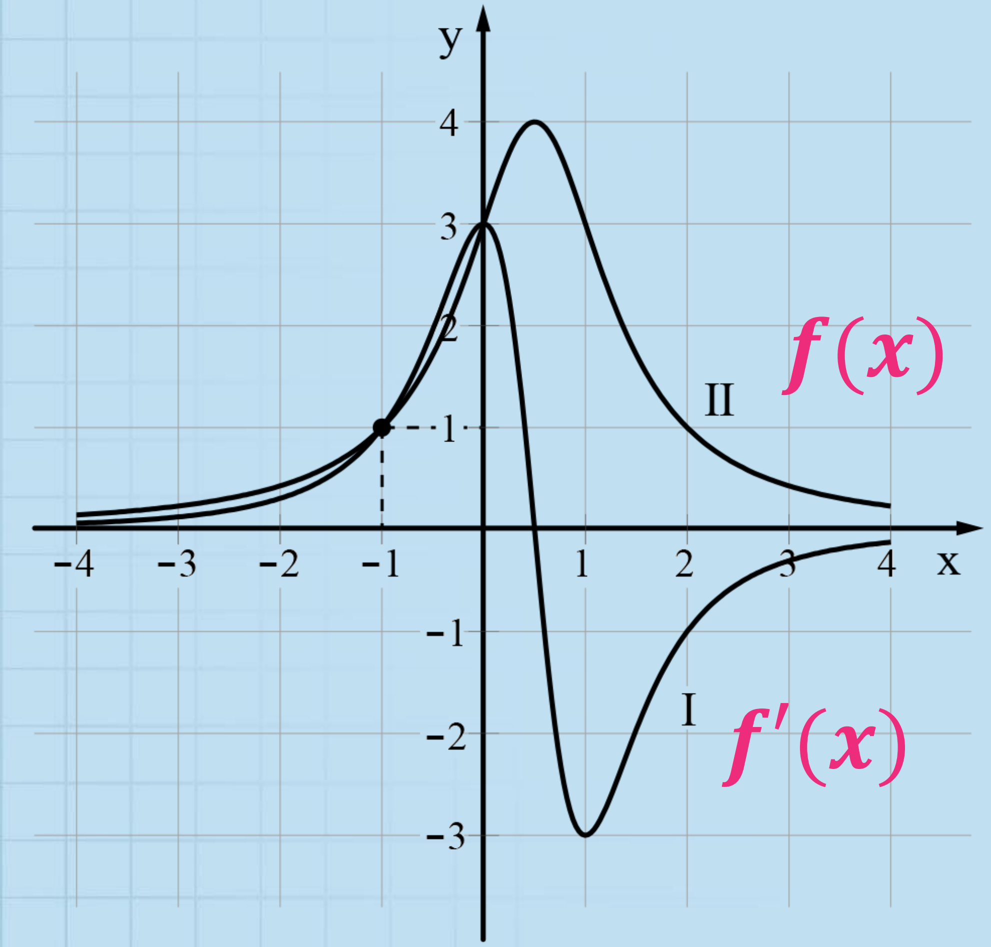
כאשר הנגזרת השנייה $f''(x)$ משנה סימן,
לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול

$\Downarrow$

כאשר לגרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$
נקודות קיצון פנימיות,
לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול

ג. (1) מצאו את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

פתרון

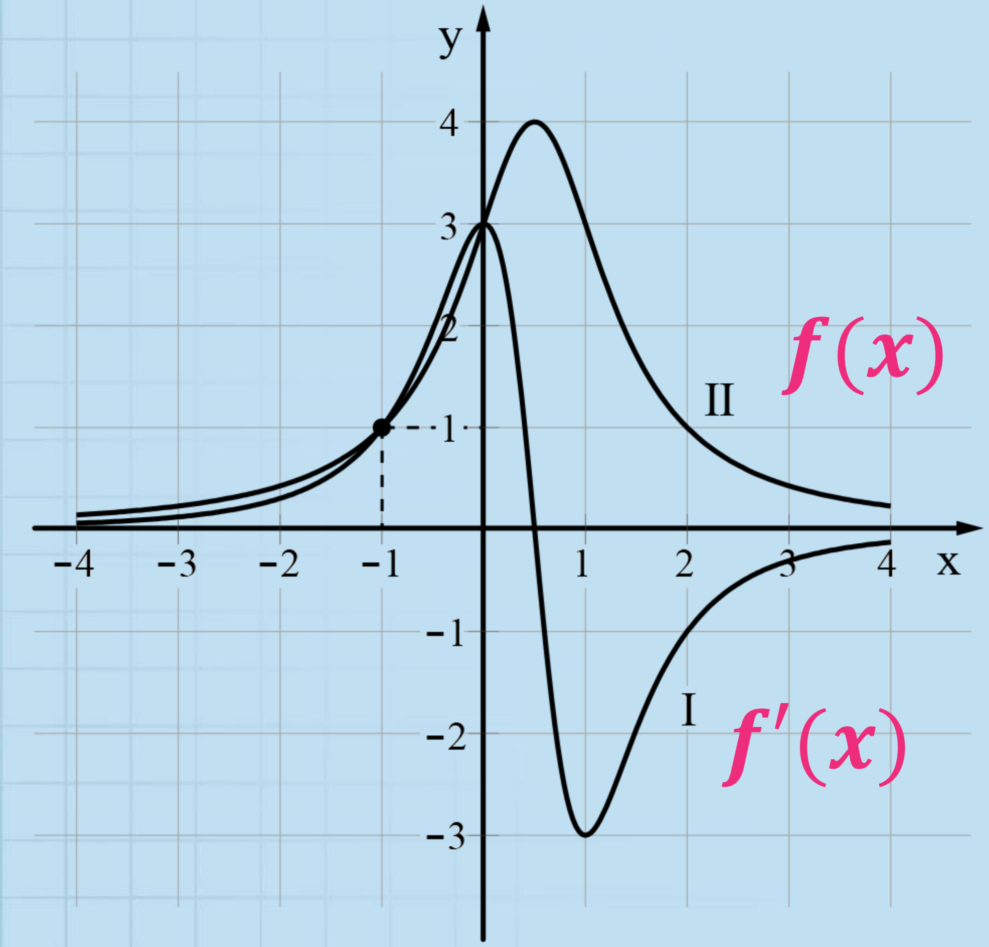


לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודות פיתול

עבור $x = 0$ או $x = 1$

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

פתרון



כאשר הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית,
הפונקציה $f(x)$ תהיה קעורה כלפי מעלה $\cup$

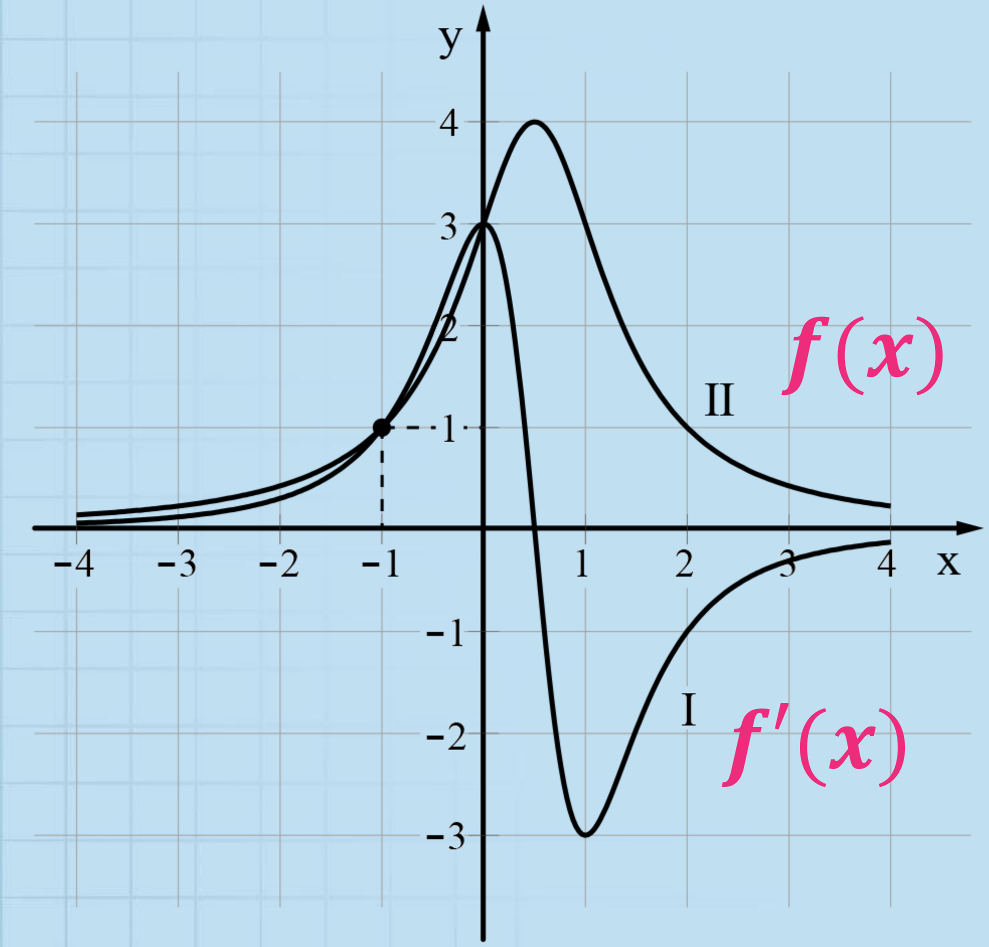
$\Downarrow$

כאשר גרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ עולה,
הפונקציה $f(x)$ תהיה קעורה כלפי מעלה $\cup$

הפונקציה $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $\cup$
בתחום: $1 < x$ **או** $x < 0$

(2) מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

פתרון



כאשר הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית,
הפונקציה $f(x)$ תהיה קעורה כלפי מטה $\cap$

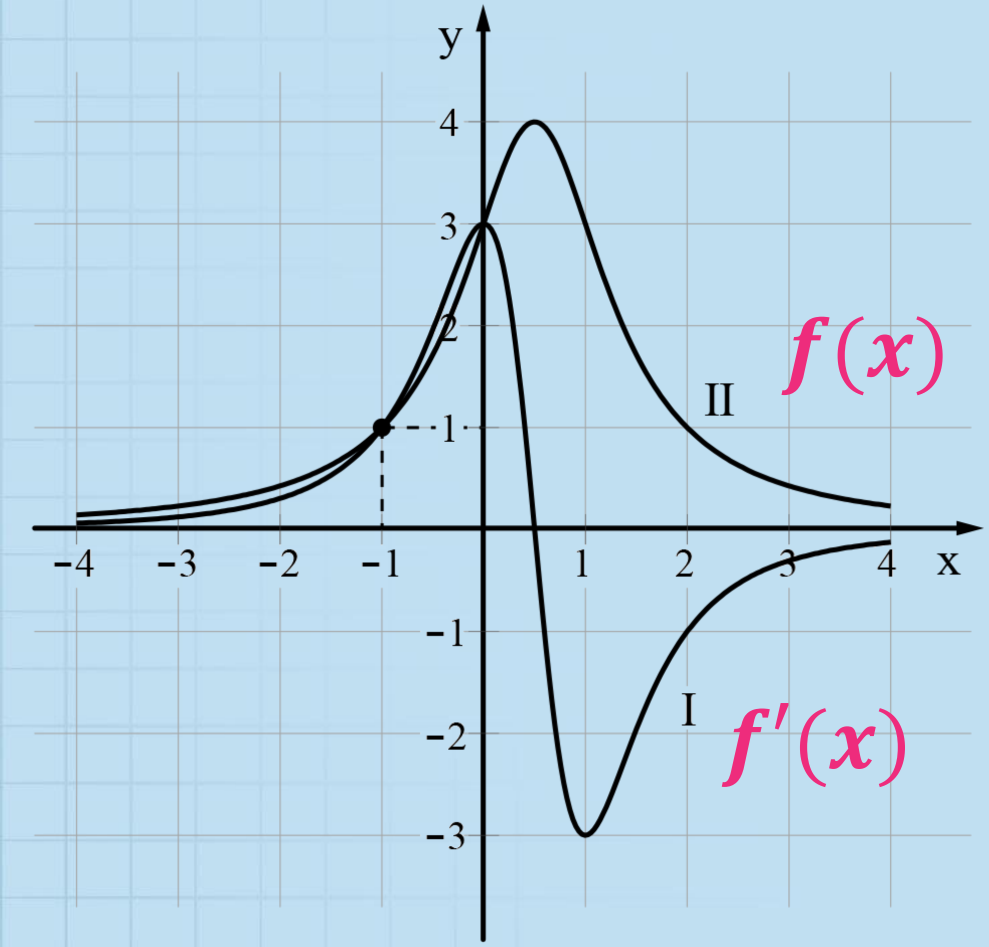
$\Downarrow$

כאשר גרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יורד,
הפונקציה $f(x)$ תהיה קעורה כלפי מטה $\cap$

הפונקציה $f(x)$ **קעורה כלפי מטה $\cap$**
בתחום: $0 < x < 1$

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$.

פתרון



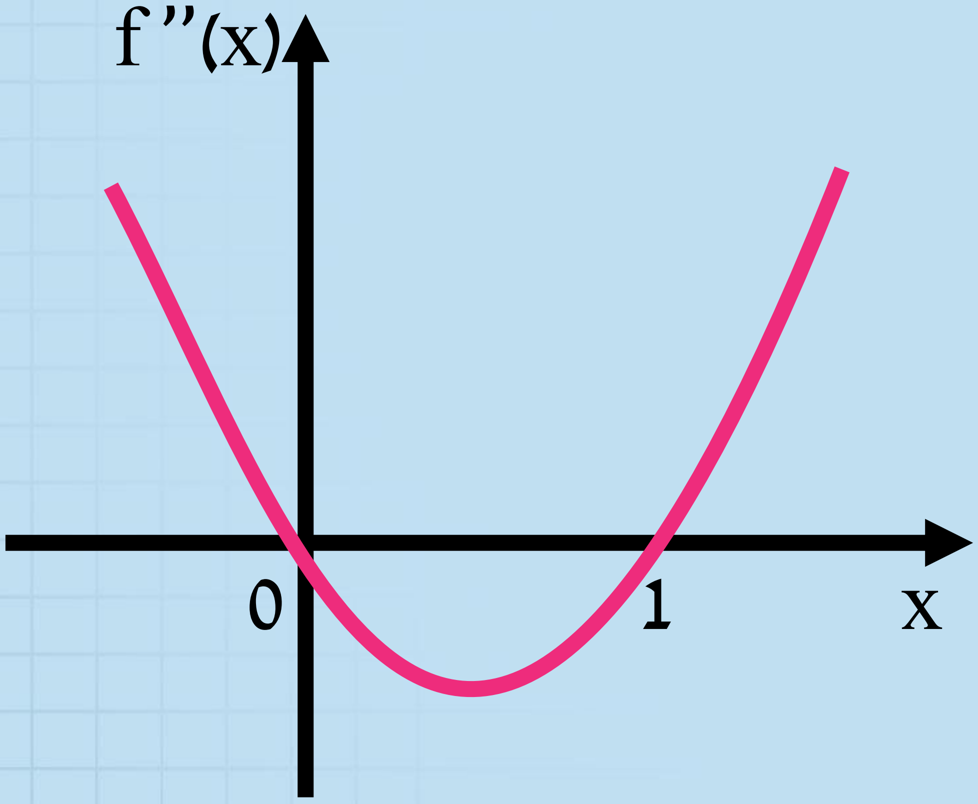
כאשר לגרף הנגזרת הראשונה $f'(x)$ נקודות קיצון פנימיות,
גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$ חותך את ציר ה- x

$\Downarrow$

$$f''(0) = f''(1) = 0$$

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$.

פתרון

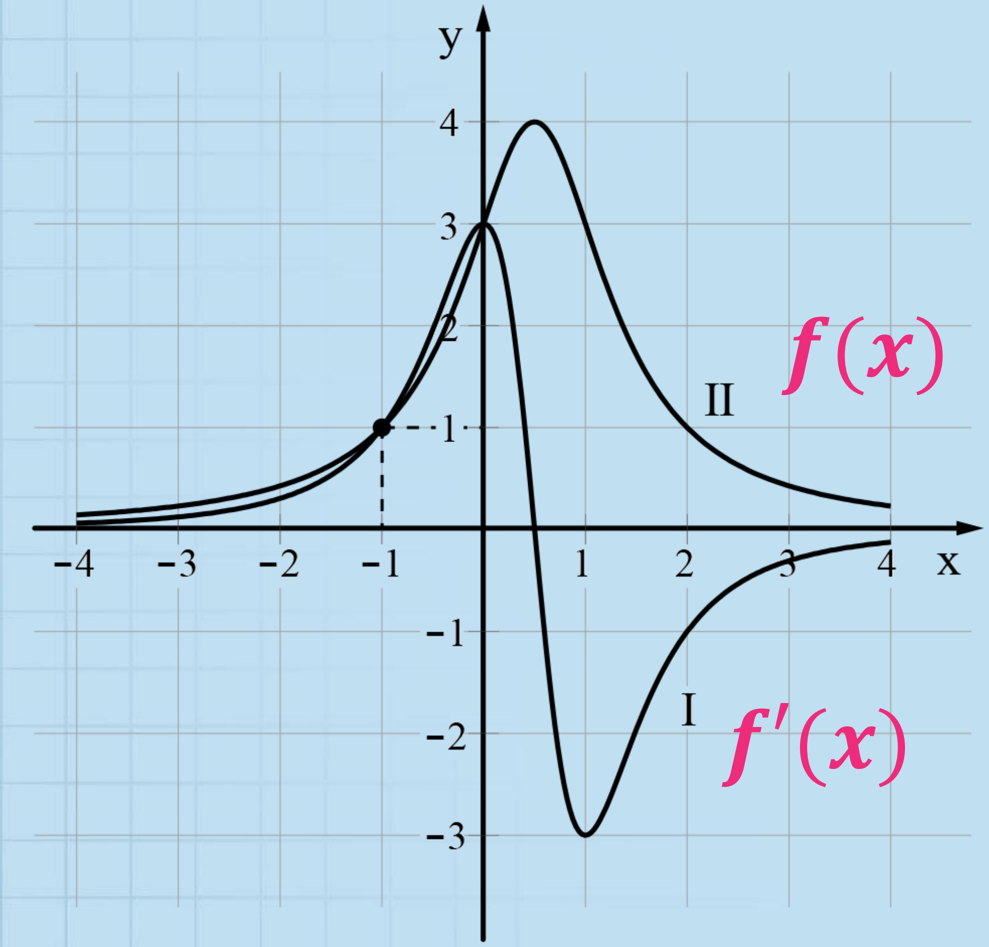


הפונקציה $f''(x)$ חיובית
בתחום: $1 < x$ או $x < 0$

הפונקציה $f''(x)$ שלילית
בתחום: $0 < x < 1$

(4) חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^1 f'(x)dx$.

פתרון



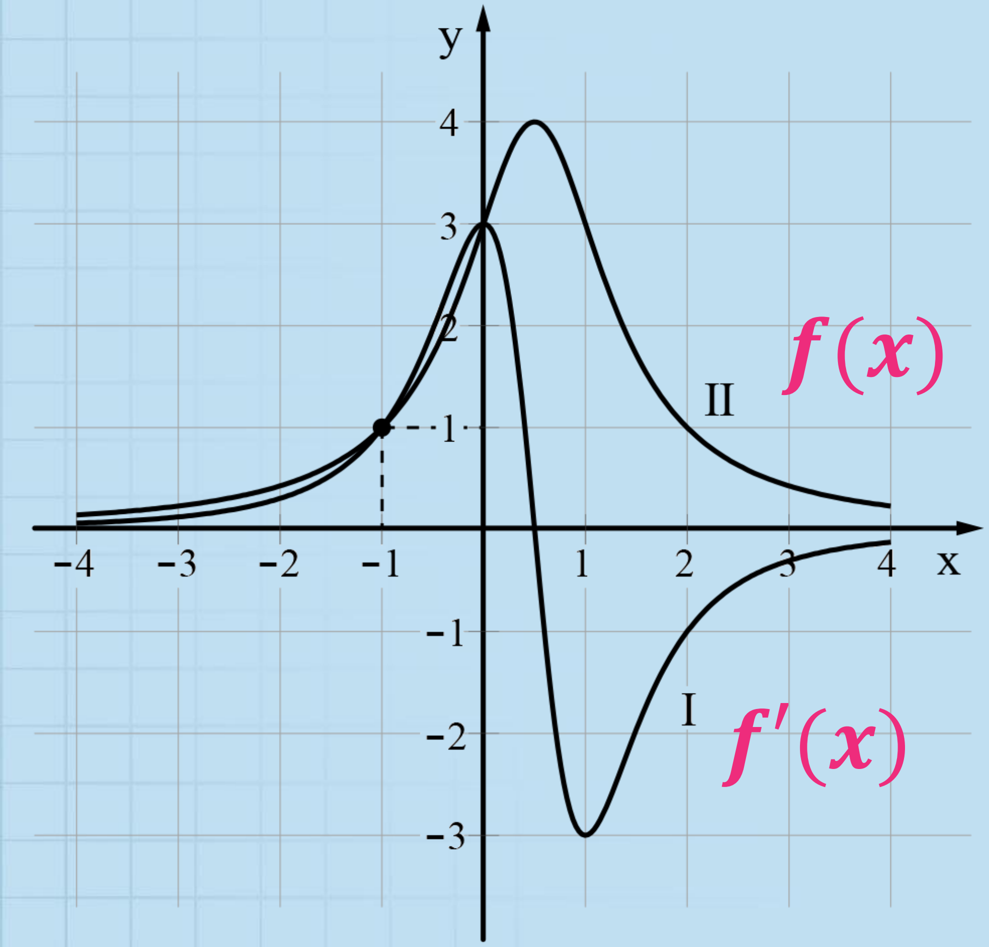
עפ"י הגדרת האינטגרל המסוים:

$$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$$

$$= 3 - 3 = 0$$

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g(x)=\int_{-1}^{x}[f'(x)-f(x)]dx$ בתחום $-1<x<0$.

פתרון



קבעו איזו מן הטענות הבאות נכונה:

(1) הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה יורדת בתחום $-1<x<0$.

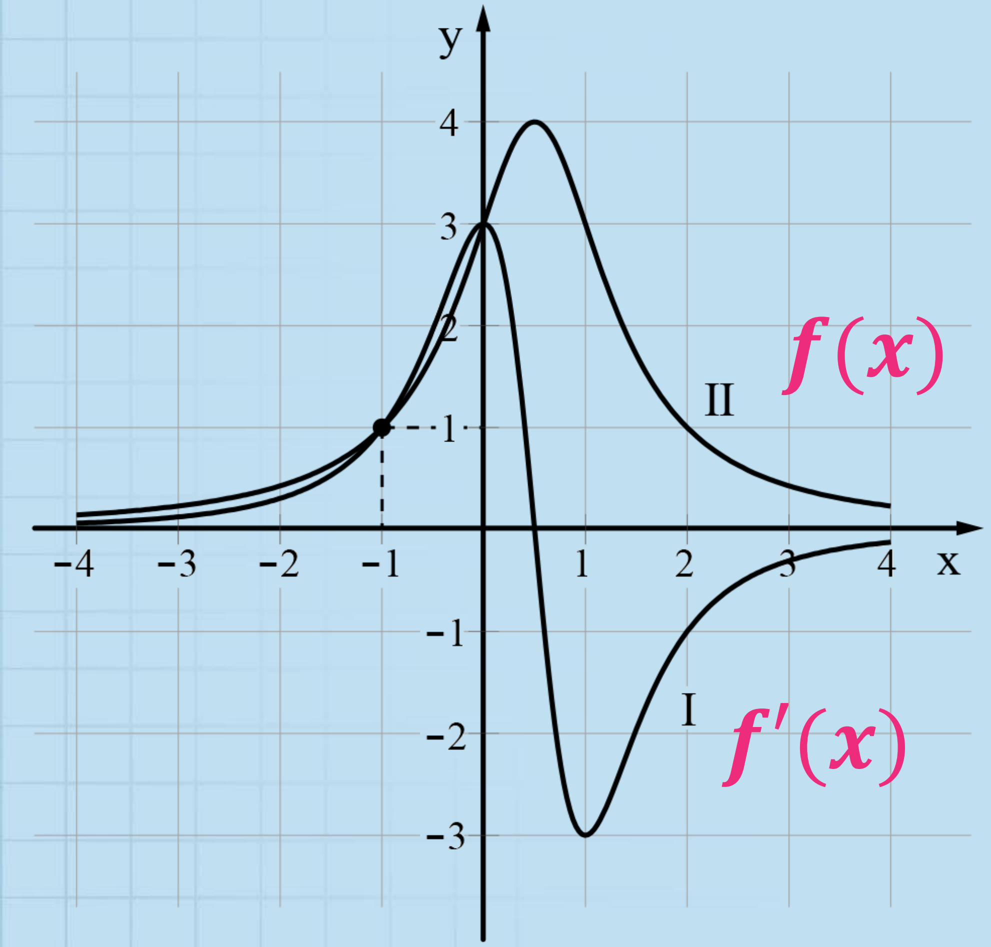
(2) הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה עולה בתחום $-1<x<0$.

(3) לא ניתן לקבוע אם הפונקציה $g(x)$ עולה או יורדת.

תחומי עליה וירידה נקבעים עפ"י תחומי חיוביות ושליליות של הנגזרת הראשונה. נבחן את $g'(x)$

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g(x)=\int_{-1}^{x}[f'(x)-f(x)]dx$ בתחום $-1<x<0$.

פתרון



$$g'(x)=f'(x)-f(x)$$

$$-1<x<0$$

עפ"י הגרפים, בתחום פתוח זה

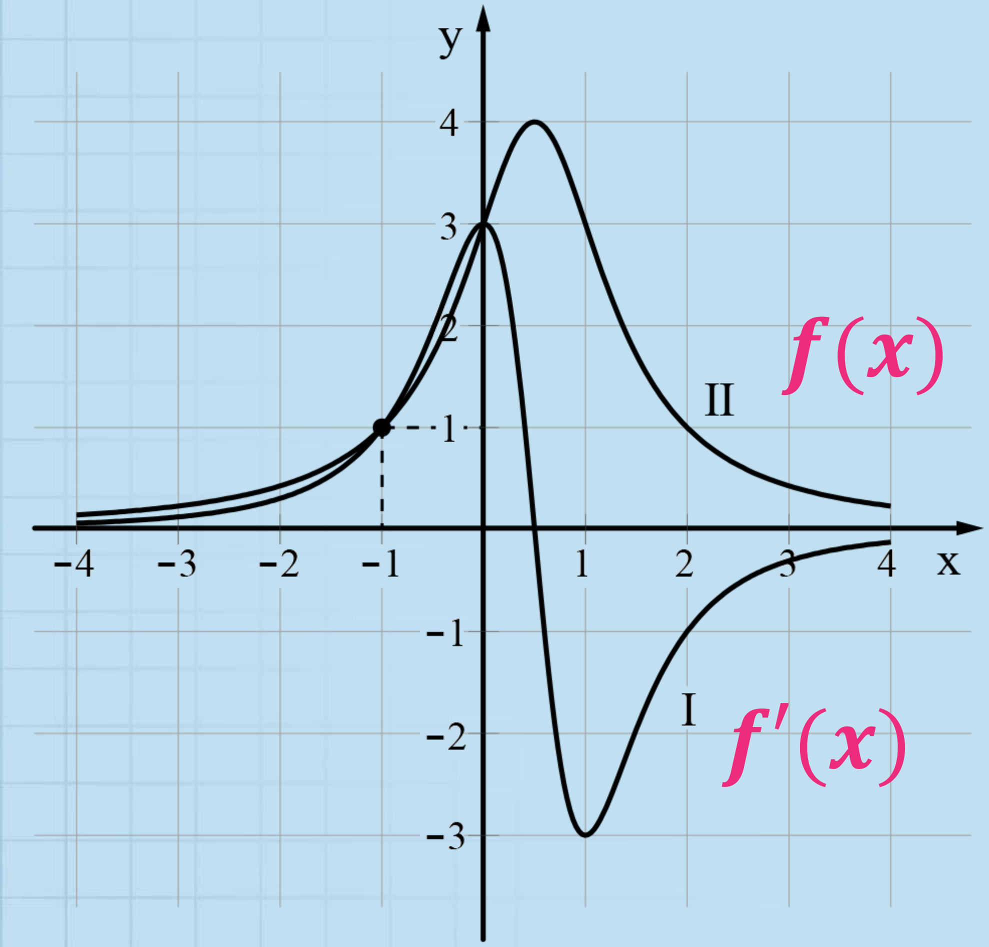
מתקיים $f(x)<f'(x)$

$$\Downarrow$$

$$g'(x)>0$$

ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g(x)=\int_{-1}^{x}[f'(x)-f(x)]dx$ בתחום $-1<x<0$.

פתרון



הפונקציה $g(x)$ עולה בתחום $-1<x<0$

טענה (2) נכונה

בהצלחה