הקנייה

הצגה קרטזית וקוטבית – המישור של גאוס

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ג'–2

582 , עמ' 29–31

המצגת נערכה ע״י ליאורה יוספזון

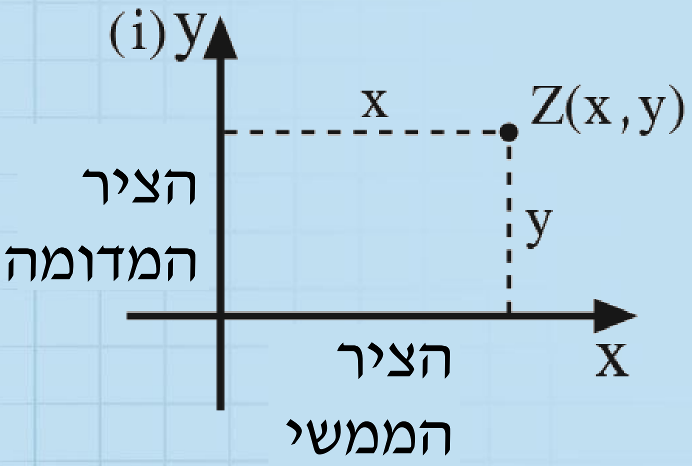
הקנייה

ניתן לתאר את המספרים המרוכבים במערכת צירים.

למספר מרוכב המסומן כ: $z = x + yi$ נתאים את הנקודה: (x,y).

בצורה כזאת לכל מספר מרוכב מותאמת נקודה יחידה ולהיפך – לכל נקודה מותאם מספר יחיד.

ציר ה-x נקרא **הציר הממשי** וציר ה-y נקרא **הציר המדומה.**



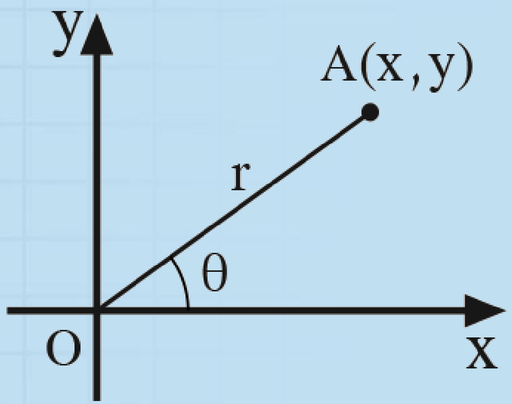
הצגה זו נקראת **ההצגה הקרטזית** או **האלגברית** של המספר המרוכב $z = x+iy$.

המישור המיוצג ע"י מערכת הצירים הנ"ל נקרא **המישור של גאוס.**

בהמשך לא נבחין בין המספר המרוכב z לנקודה z המייצגת אותו.

הקנייה

ההצגה הקוטבית (הטריגונומטרית) – המישור של גאוס



ניתן להציג מספר מרוכב בצורה נוספת במישור של גאוס.

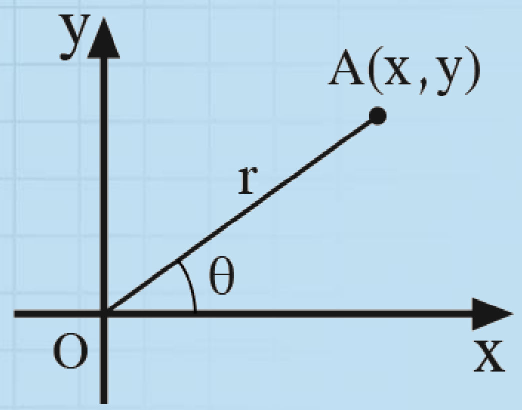
תהי נתונה נקודה $A(x,y)$ במישור של גאוס המתאימה למספר המרוכב $z = x + iy$. נסמן ב-r את מרחקה של הנקודה A מראשית הצירים O וב-θ את **הזווית** בין הקטע AO לכיוון החיובי של ציר x.

הזוג (r,θ) נקרא **ההצגה הקוטבית** או **הטריגונומטרית** של הנקודה (x,y).

לפני שנמצא את הקשר בין שתי ההצגות נביא הגדרות.

הקנייה

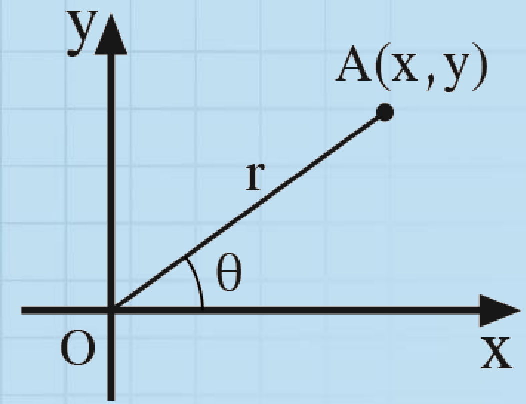
הגדרות:



הערך המוחלט של מספר מרוכב – המרחק r מראשית הצירים נקרא הערך המוחלט של המספר המרוכב $z = x + iy$ ומסומן $r = |z|$. r הוא מספר ממשי אי שלילי.

הארגומנט של מספר מרוכב – הזווית θ נקראת הארגומנט של המספר המרוכב $z = x + iy$ ומסומנת $\theta = \arg z$.

הקנייה

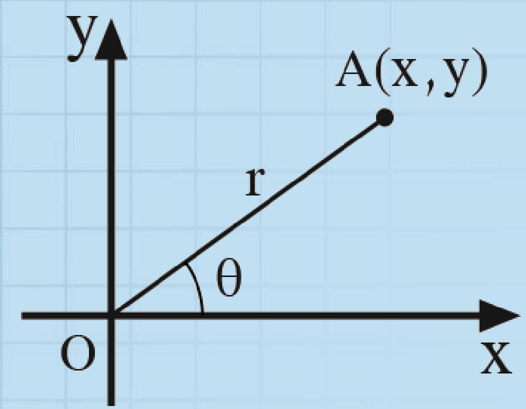


הערות:

א) הזוית θ איננה נקבעת באופן יחיד אלא עד כדי כפולות שלמות של 360^o או של 2π רדיאנים. אם לדוגמא למספר z מתאימה הזוית $\frac{\pi}{6}$ אז גם הזוית $\frac{\pi}{6}+2\pi K$ (K שלם) מתאימה לו.

ב) מהערה א׳ נוכל להסיק את המסקנה הבאה:

אם הערכים המוחלטים של שני מספרים מרוכבים שווים זה לזה והארגומנטים שלהם נבדלים זה מזה בכפולות שלמות של 360^o (או כפולות שלמות של 2π רדיאנים) אז שני המספרים שווים זה לזה.



הקנייה

הערות:

ג) לנקודה $(0,0)$, ראשית הצירים, אין הצגה קוטבית. אמנם ניתן לומר ש-$r = 0$ אבל קשה לייחס לה זווית.

ד) ההגדרה הקוטבית של מספר מרוכב z מבוססת למעשה על **המעגל הטריגונומטרי**. הסבר על המעגל הטריגונומטרי ניתן לראות בספר **מתמטיקה חלק א׳** מאת בני גורן.

ה) החל מסעיף זה צריך יהיה מדי פעם להיעזר בזהויות טריגונומטריות. נזכיר את הזהויות העיקריות.

הקנייה

זהויות טריגונומטריות

הזהויות היסודיות:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

סכום והפרש זויות:

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

הקנייה

זהויות טריגונומטריות

זוית כפולה:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

סכום והפרש פונקציות:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

בהצלחה