פתרון תרגיל

נקודות קיצון פנימיות – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 216, ת. 49

השאלה

49) לפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{a+\cos x}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{2}{3}\pi$.

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x)=f(x)$.

(1) מצא בתחום הנ"ל את שיעור ה-x של נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$ וקבע את סוגה.

(2) מצא את הזווית שהמשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{2}$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

49) לפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{a+\cos x}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{2}{3}\pi$. א. מצא את a.

פתרון

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$$

$$f'(x)=\frac{\cos x\,(a+\cos x)-\sin x\ \cdot -\sin x}{(a+\cos x)^2}$$

$$=\frac{a\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(a+\cos x)^2}=\frac{a\cos x+1}{(a+\cos x)^2}$$

49) לפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{a+\cos x}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{2}{3}\pi$. א. מצא את a.

פתרון

$$f'(x)=\frac{a\cos x+1}{(a+\cos x)^2}$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{a\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+1}{\left(a+\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)^2}=0$$

49) לפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{a+\cos x}$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\frac{2}{3}\pi$. א. מצא את a.

פתרון

$$-\frac{a}{2}+1=0$$

$$a=2$$

$f(x) = \frac{sinx}{2 + \cos x}$ ב. מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

פתרון

נדרוש $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{a\cos x + 1}{(a + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$

$f(x) = \frac{sinx}{2 + cos\,x}$ ב. מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

פתרון

$$x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$$

נמצא פתרונות בתחום באמצעות k:

$k = 1:$

$$\boldsymbol{x = \frac{4}{3}\pi}$$

$k = 0:$

$$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi}$$

ב. $f(x) = \frac{sinx}{2 + cos\, x}$ מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

פתרון

$$x = \frac{4}{3}\pi \qquad x = \frac{2}{3}\pi$$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ"י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(2\, cos\, x + 1)' = -2\, sin\, x$$

$f(x) = \frac{sinx}{2 + cos\,x}$ ב. מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

פתרון

$$(2\,cos\,x + 1)' = -2\,sin\,x$$

$$x = \frac{2}{3}\pi \qquad -2\,sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) < 0$$

עבור $x = \frac{2}{3}\pi$ לפונקציה נקודת מקסימום

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{2 + cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ נקודת מקסימום

ב. $f(x) = \frac{sinx}{2 + cos\,x}$ מצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

פתרון

$$(2\,cos\,x + 1)' = -2\,sin\,x$$

$$x = \frac{4}{3}\pi \qquad -2\,sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) > 0$$

עבור $x = \frac{4}{3}\pi$ לפונקציה נקודת מינימום

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{2 + cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

נקודת מינימום $\left(\frac{4}{3}\pi, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$.

(1) מצא בתחום הנ"ל את שיעור ה-x של נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

נדרוש $g'(x) = 0$:

$$g'(x) = f(x) = \frac{sinx}{2 + \cos x} = 0$$

$$sinx = 0$$

$$x = \pi k$$

חשוד לנקודת קיצון **פנימית**:

$$k = 1: \qquad x = \pi$$

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$.
(1) מצא בתחום הנ"ל את שיעור ה-x של נקודת הקיצון הפנימית של $g(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

$$x = \pi$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $g''(x)$

$$g''(x) = f'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

$$g''(\pi) = f'(\pi) = \frac{2\cos \pi + 1}{(2+\cos \pi)^2} < 0$$

עבור $x = \pi$ לפונקציה נקודת מקסימום

(2) מצא את הזווית שהמשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון

שיפוע משיק לגרף הפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה, ול- tg הזווית הנוצרת בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר x ונגד כיוון השעון

$$tg\,\alpha = m = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2+\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

באמצעות מחשבון:

$$\alpha = 26.565^\circ$$

בהצלחה