פתרון תרגיל

נקודות קיצון פנימיות – פונקציות טריגונומטריות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 215, ת. 41

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

41) לפונקציה $f(x) = \sin ax$ יש ערך קיצון בנקודה $x = \pi$.

א. מצא את a אם נתון ש-$1 < a < 2$.

ב. קבע אם הנקודה הנ"ל היא נקודת מינימום או מקסימום.

ג. מצא בתחום $0 \le x \le \pi$ את שיעורי ה-x של הנקודות שעל גרף הפונקציה $f'(x)$ ששיפוע המשיק בהן הוא $-\frac{9}{8}\sqrt{2}$.

41) לפונקציה $f(x) = \sin ax$ יש ערך קיצון בנקודה $x = \pi$.

א. מצא את a אם נתון ש-$1 < a < 2$.

פתרון

$$f'(\pi) = 0$$

$$f'(x) = cos(ax) \cdot a = a\,cos(ax)$$

$$f'(\pi) = a\,cos(a \cdot \pi) = 0$$

$$\cancel{a = 0}$$

$$cos(a\pi) = 0$$

$$1 < a < 2$$

41) לפונקציה $f(x) = \sin ax$ יש ערך קיצון בנקודה $x = \pi$.

א. מצא את a אם נתון ש-$1 < a < 2$.

פתרון

$$\cos(a\pi) = 0$$

עפ"י פתרונות מיוחדים לפונקציית קוסינוס

$$a\pi = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$a = \frac{1}{2} + k$$

עפ"י התחום של a, $k = 1$:

$$\boldsymbol{a = 1.5}$$

ב. קבע אם הנקודה הנ"ל היא נקודת מינימום או מקסימום.

פתרון

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

$$f''(x) = (a\,cos(ax))' = (1.5\,cos(1.5x))' = 1.5 \cdot -sin(1.5x) \cdot 1.5$$

$$= -2.25\,sin(1.5x)$$

$$f''(\pi) = -2.25\,sin(1.5\pi) > 0$$

עבור $x = \pi$ תתקבל נקודת מינימום

ג. מצא בתחום $0 \le x \le \pi$ את שיעורי ה-x של הנקודות שעל גרף הפונקציה $f'(x)$ ששיפוע המשיק בהן הוא $-\frac{9}{8}\sqrt{2}$.

פתרון

שיפוע משיק לפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה

עבור נקודות ההשקה, המשיק לפונקציה $f'(x)$ יקיים

$$f''(x) = -\frac{9}{8}\sqrt{2}$$

$$-2.25\, sin(1.5x) = -\frac{9}{8}\sqrt{2}$$

ג. מצא בתחום $0 \le x \le \pi$ את שיעורי ה-x של הנקודות שעל גרף הפונקציה $f'(x)$ ששיפוע המשיק בהן הוא $-\frac{9}{8}\sqrt{2}$.

פתרון

$$\sin(1.5x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1.5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$1.5x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi k}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi k}$$

ג. מצא בתחום $0 \le x \le \pi$ את שיעורי ה-x של הנקודות שעל גרף הפונקציה $f'(x)$ ששיפוע המשיק בהן הוא $-\frac{9}{8}\sqrt{2}$.

פתרון

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi k$$

נמצא פתרונות בתחום באמצעות k:

$k = 0:$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$k = 0:$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

בהצלחה