הקנייה

הנגזרת של פונקציית הסינוס

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 201–203

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

הקנייה

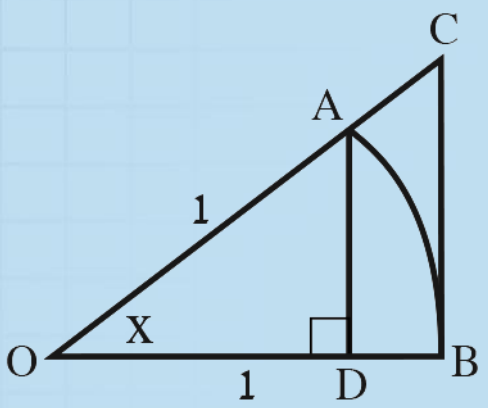
הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

בסעיף זה נמצא את הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות. לפני שנעשה זאת נחשב **גבול** מסויים שדרוש לנו בהמשך.

נוכיח עכשיו את **הטענה הבאה:** $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$ (x נמדד **ברדיאנים**).

הקנייה

הוכחת הטענה:



נתונה גיזרה OAB המתאימה לזווית מרכזית x (ברדיאנים), רדיוס המעגל הוא $R = 1$ ומרכזו הוא O. הנקודה C נמצאת על המשך OA, BC משיק למעגל בנקודה B ו-AD מאונך ל-OB. קל לראות שמתקיים $AD < \overset{\frown}{AB} < BC$, ($\overset{\frown}{AB}$ – הקשת AB).

כמו כן $R = 1$ ולכן: $BC = tg\,x$, $\overset{\frown}{AB} = x$ (אורך קשת המתאימה לזווית מרכזית x ברדיאנים), $AD = \sin x$, לכן $\sin x < x < tg\,x$. נחלק ב-$\sin x > 0$ ונקבל:

$\frac{1}{\cos x} < \frac{x}{\sin x} < 1$, אי שוויון זה שקול לאי השוויון $1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x$.

היות ו-$\cos 0 = 1$ הרי $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, לכן $1 < \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} < 1$

מכאן נקבל את הטענה: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

הקנייה

הנגזרת של פונקציית הסינוס

נחשב עכשיו את נגזרת הפונקציה $f(x) = \sin x$ בנקודה x_1 עפ"י הגדרת הנגזרת.

ניעזר בזהות $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ובגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

טענה: $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

הקנייה

הנגזרת של פונקציית הסינוס

הוכחה:

$$(\sin x_1)' = \lim_{x \to x_1} \frac{\sin x - \sin x_1}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{2\sin\frac{x-x_1}{2}\cos\frac{x+x_1}{2}}{x - x_1} =$$

$$= \lim_{x \to x_1} \frac{\sin\frac{x-x_1}{2}}{\frac{x-x_1}{2}} \cdot \lim_{x \to x_1} \cos\frac{x+x_1}{2} = 1 \cdot \cos\frac{x_1+x_1}{2} = \cos x_1$$

הנוסחה המתקבלת: $(\sin x)' = \cos x$.

הקנייה

הנגזרת של פונקציית הסינוס

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

הערה: עפ"י הנגזרת של פונקציה מורכבת נקבל את הנוסחה:

$$\boxed{(\sin(f(x)))' = \cos(f(x))\cdot f'(x)}$$

הקנייה

דוגמא א':

גזור את הפונקציות הבאות:

(1) $y = x^3 + 4\sin x$ (2) $y = 2x\sin x$ (3) $y = \sin 3x$

(1) $(x^3 + 4\sin x)' = (x^3)' + (4\sin x)' = 3x^2 + 4\cos x$.

הקנייה

דוגמא א׳:

גזור את הפונקציות הבאות:

(1) $y = x^3 + 4\sin x$ (2) $y = 2x\sin x$ (3) $y = \sin 3x$

(2) $(2x\sin x)' = 2\cdot\sin x + 2x\cdot\cos x = 2\sin x + 2x\cos x$.

(3) $(\sin 3x)' = \cos 3x\cdot(3x)' = \cos 3x\cdot 3 = 3\cos 3x$.

בהצלחה