פתרון תרגיל

זיהוי הפונקציה ותכונותיה עפ"י הגרף

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 189, ת. 5

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

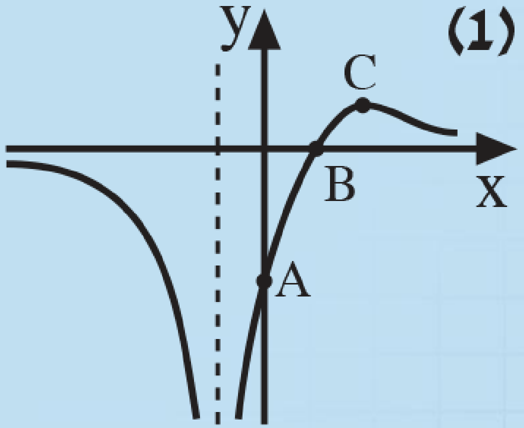
השאלה

5) נתונות הפונקציות:

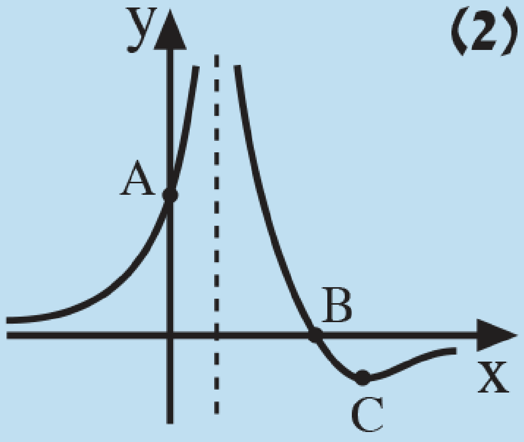
א) $f(x)=\dfrac{4(x-2)}{(x-1)^2}$ **ב)** $f(x)=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$ **ג)** $f(x)=\dfrac{4(2-x)}{(x-1)^2}$

שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הפונקציות הנ״ל:

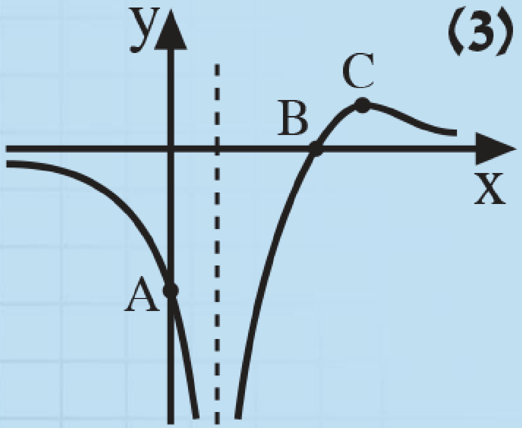
(1)



(2)



(3)



השאלה

א. מצא איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות הנ"ל.

ב. מצא ע"י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

ג. סעיף זה מתייחס לפונקציה $f(x)$ שבציור (1).

(1) שרטט את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$.

ד. סעיף זה מתייחס לפונקציה $f(x)$ שבציור (3). $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g''(x) = f(x)$ עבור $x > 1$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

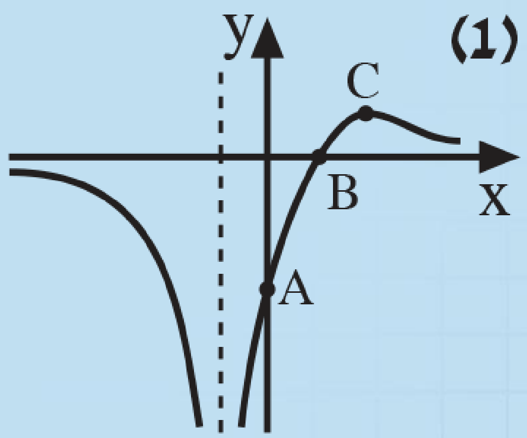
(2) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g'(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

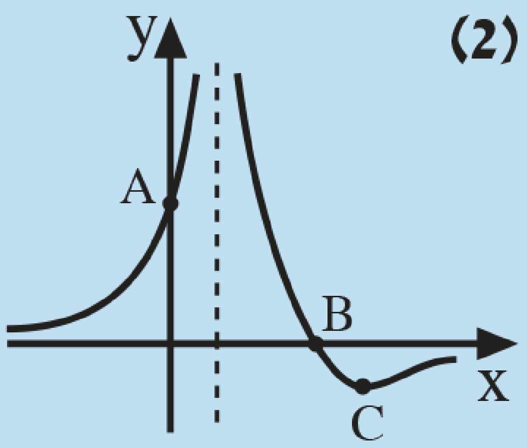
א. מצא איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות הנ"ל.

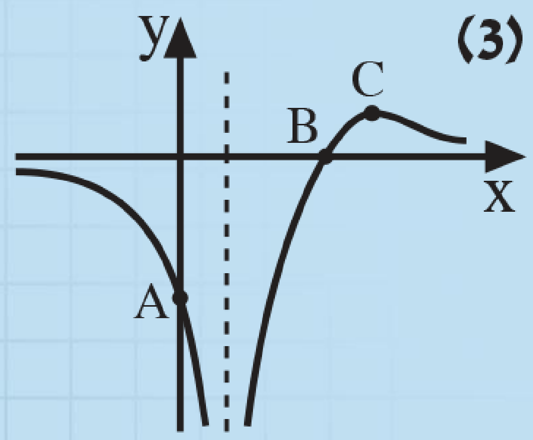
פתרון

א) $f(x) = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$ ב) $f(x) = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$ ג) $f(x) = \frac{4(2-x)}{(x-1)^2}$

שלושת הגרפים הבאים מתארים, לא לפי הסדר, את הפונקציות הנ"ל:







א. מצא איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות הנ"ל.

פתרון

א) $f(x) = \dfrac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

ב) $f(x) = \dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

ג) $f(x) = \dfrac{4(2-x)}{(x-1)^2}$

לגרפים (2) ו- (3) אסימפטוטה אנכית עבור ערך x **חיובי**
נאתר את הפונקציה בעלת אסימפטוטה אנכית עבור ערך x **שלילי**
– היא זו המתאימה לגרף (1)

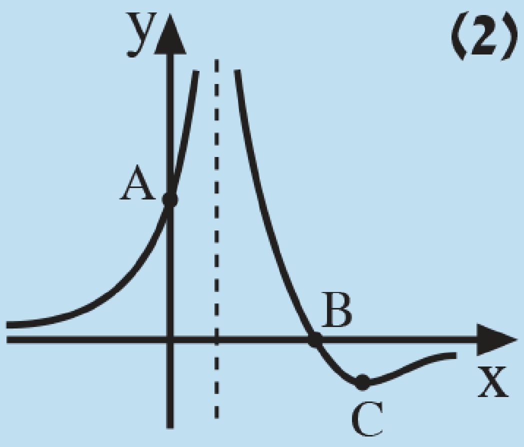
המכנה של פונקציה ב' מתאפס עבור $x = -1$,
ערך זה אינו מאפס את המונה ולכן הישר $x = -1$
אסימפטוטה אנכית לפונקציה, **פונקציה ב' מתאימה לגרף (1)**

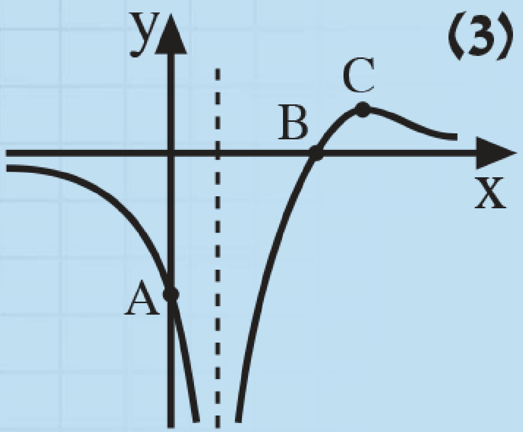
א. מצא איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות הנ״ל.

פתרון

לגרף (2) נקודת חיתוך עם ציר y בחלקו **החיובי**

לגרף (3) נקודת חיתוך עם ציר y בחלקו **השלילי**





ג) $f(x) = \frac{4(2-x)}{(x-1)^2}$

א) $f(x) = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

א) $f(0) = \frac{4(0-2)}{(0-1)^2} = -8 < 0$

א. מצא איזה גרף מתאר את כל אחת מהפונקציות הנ״ל.

פתרון

פונקציה א' מתאימה לגרף (3)

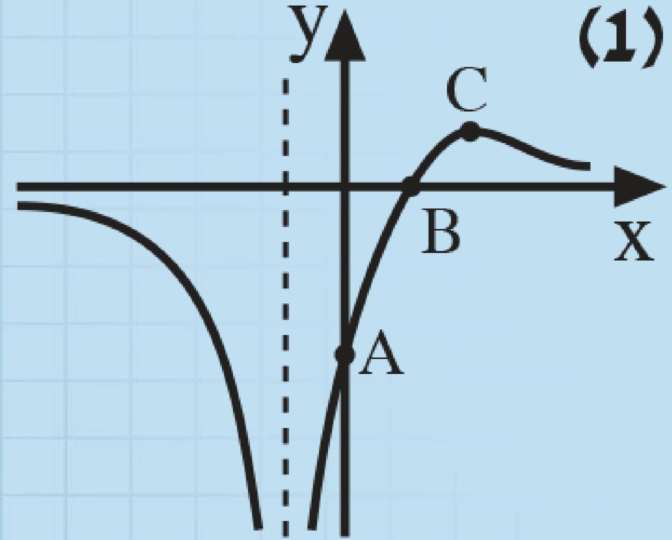
פונקציה ג' מתאימה לגרף (2)

ב. מצא ע״י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

ב) $f(x) = \dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

(1)



הנקודה A מתארת חיתוך של הפונקציה עם ציר y:

$$f(0) = \frac{8\cdot(-1)}{1^2} = -8$$

$\boldsymbol{A:\ (0,-8)}$

הנקודה B מתארת חיתוך של הפונקציה עם ציר x:

$$\frac{8(x-1)}{(x+1)^2} = 0$$

$$x = 1$$

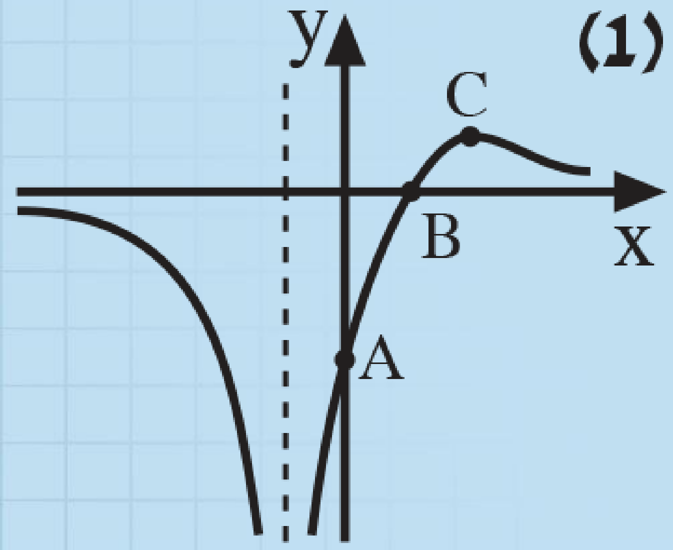
$\boldsymbol{B:\ (1,0)}$

ב. מצא ע"י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

ב) $f(x) = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

(1)



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{8 \cdot (x+1)^2 - 8(x-1) \cdot 2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{8(x+1)(x+1-2x+2)}{(x+1)^4}$$

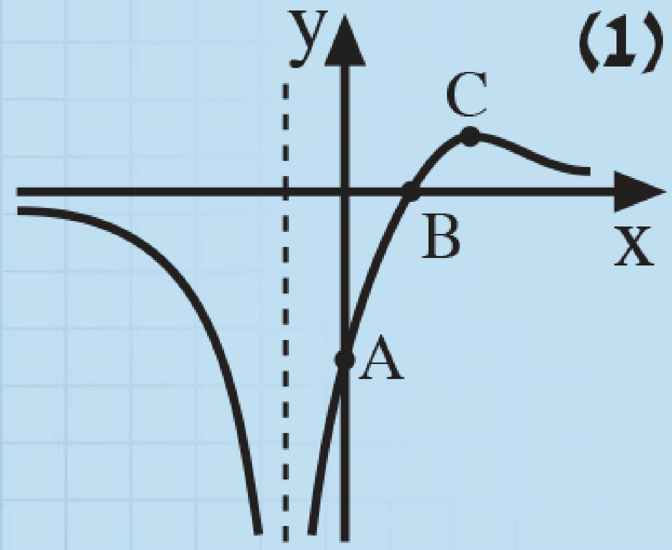
$$= \frac{8(x+1)(-x+3)}{(x+1)^4} = 0$$

ב. מצא ע״י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

ב) $f(x) = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

(1)



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{8(x+1)(-x+3)}{(x+1)^4} = 0$$

$\cancel{x = -1}$ $\qquad$ $x = 3$

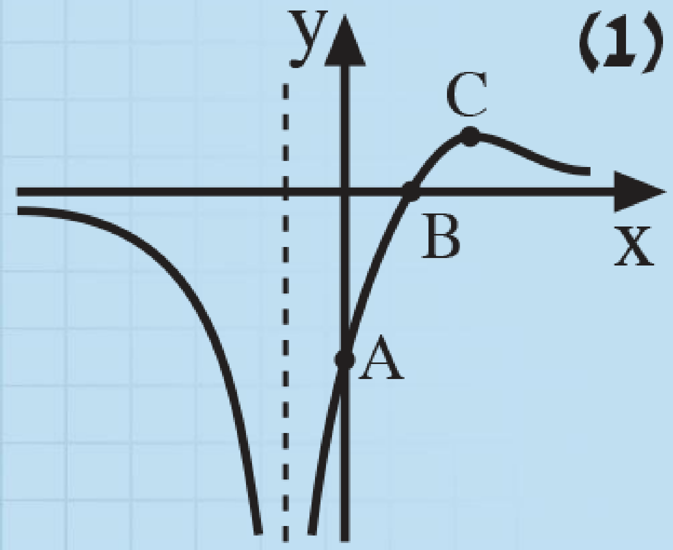
$x \neq -1$

ב. מצא ע״י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

ב) $f(x) = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

(1)



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

$$f(3) = \frac{8 \cdot 2}{4^2} = 1$$

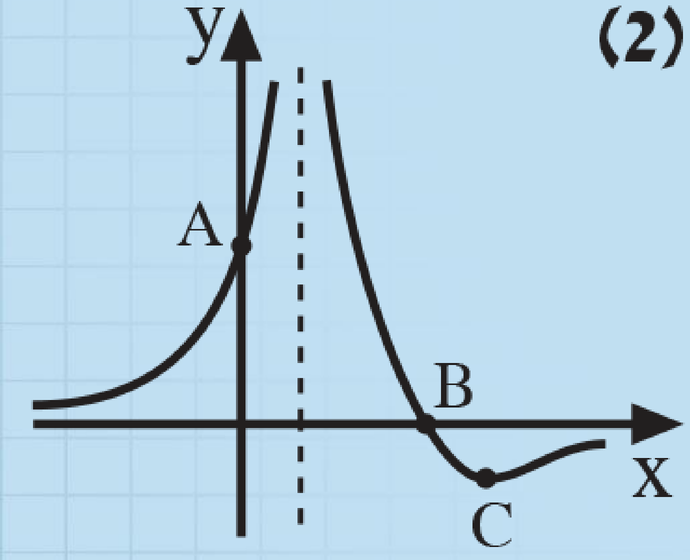
$C\colon\ (3, 1)$

ב. מצא ע"י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

ג) $f(x)=\frac{4(2-x)}{(x-1)^2}$

(2)



הנקודה A מתארת חיתוך של הפונקציה עם ציר y:

$$f(0)=\frac{4\cdot 2}{(-1)^2}=8$$

A: $(0,8)$

הנקודה B מתארת חיתוך של הפונקציה עם ציר x:

$$\frac{4(2-x)}{(x-1)^2}=0$$

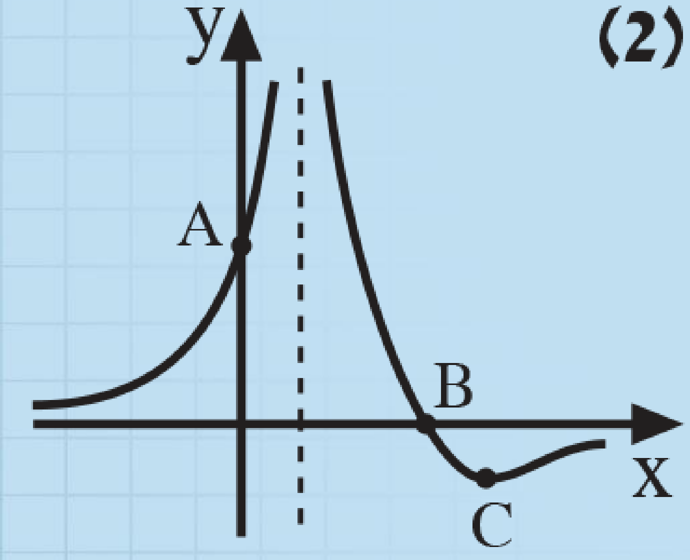
$$x=2$$

B: $(2,0)$

ב. מצא ע״י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

ג) $f(x) = \frac{4(2-x)}{(x-1)^2}$



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

(2) $$f'(x) = \frac{-4\cdot(x-1)^2 - 4(2-x)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}$$

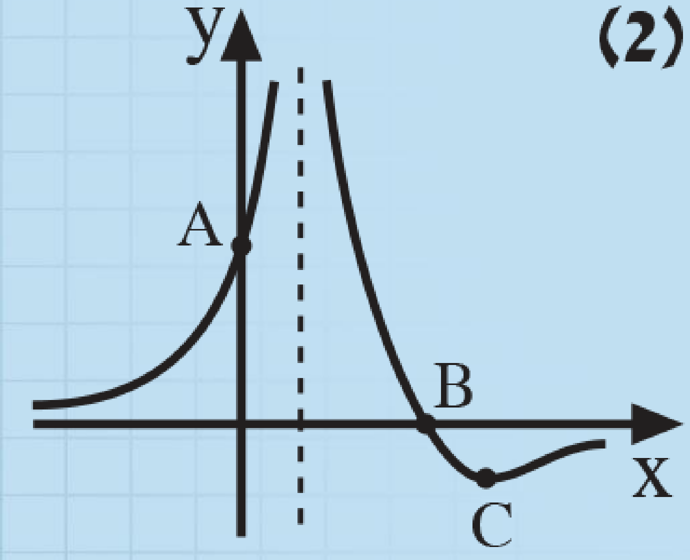
$$= \frac{-4(x-1)(x-1+4-2x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4} = 0$$

ב. מצא ע״י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

ג) $f(x)=\frac{4(2-x)}{(x-1)^2}$



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

(2) $$f'(x)=\frac{-4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4}=0$$

$\cancel{x=1}$ $\qquad$ $x=3$

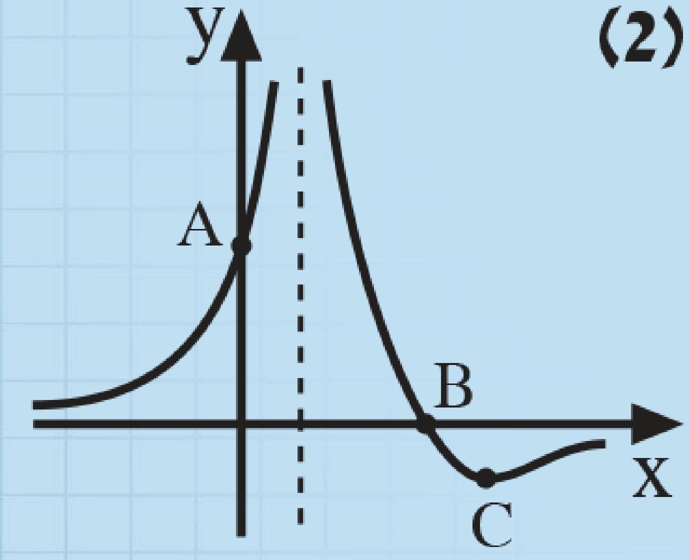
$x\neq 1$

ב. מצא ע״י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

ג) $f(x) = \dfrac{4(2-x)}{(x-1)^2}$

(2)



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

$$f(3) = \frac{4 \cdot (-1)}{2^2} = -1$$

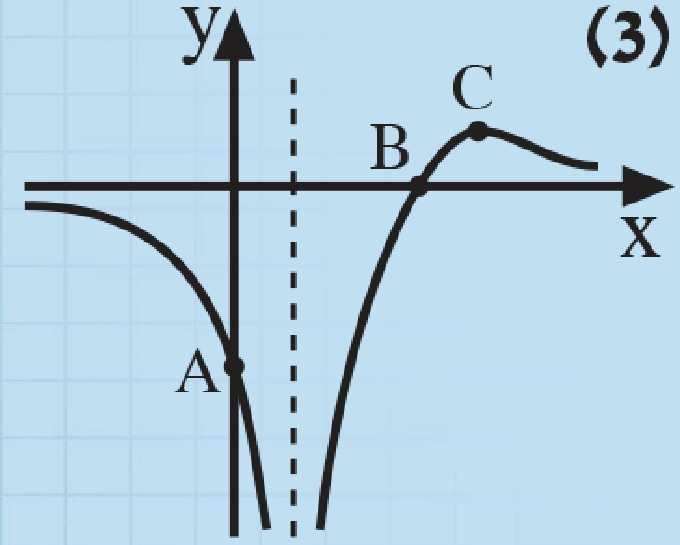
$C:\ (3, -1)$

ב. מצא ע"י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

$$f(x)=\frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$$ (א

(3)



הנקודה A מתארת חיתוך של הפונקציה עם ציר y:

$$f(0)=\frac{4\cdot(-2)}{(-1)^2}=-8$$

$A:\ (0,-8)$

הנקודה B מתארת חיתוך של הפונקציה עם ציר x:

$$\frac{4(x-2)}{(x-1)^2}=0$$

$$x=2$$

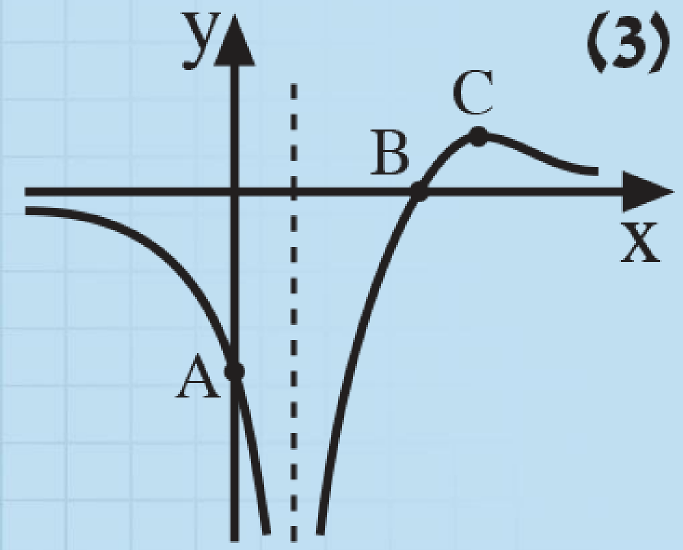
$B:\ (2,0)$

ב. מצא ע״י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

א) $f(x) = \dfrac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

(3)



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

$$f'(x) = \frac{4\cdot(x-1)^2 - 4(x-2)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{4(x-1)(x-1-2x+4)}{(x-1)^4}$$

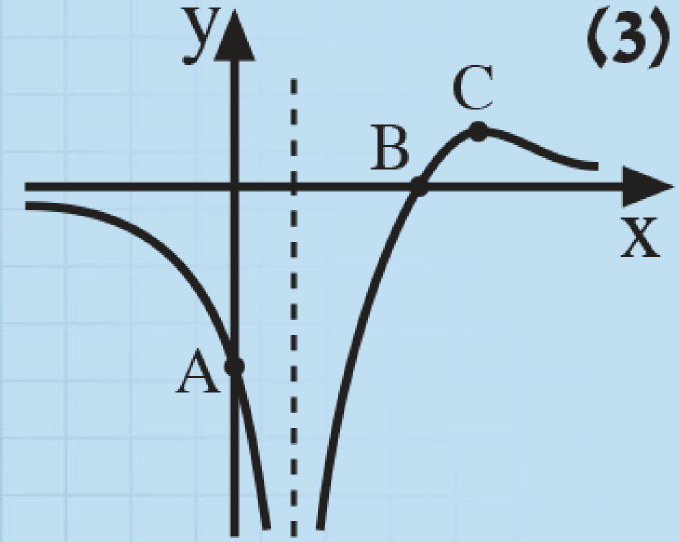
$$= \frac{4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4} = 0$$

ב. מצא ע"י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

א) $f(x)=\frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

(3)



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

$$f'(x)=\frac{4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4}=0$$

$\cancel{x=1}$ $\qquad$ $x=3$

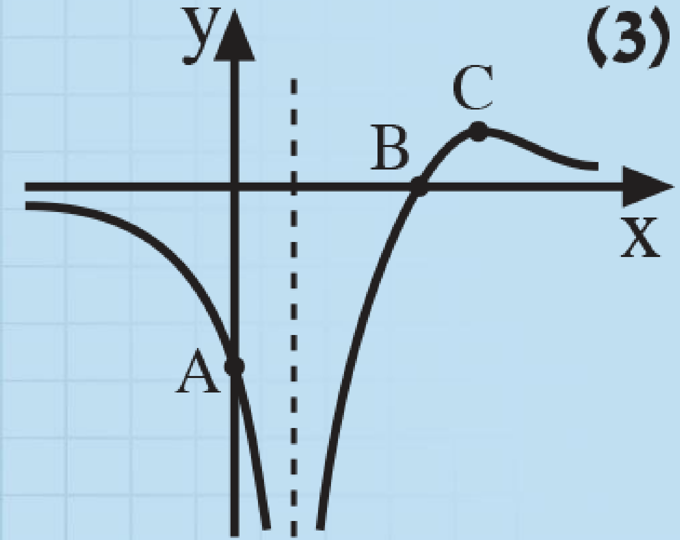
$x\neq 1$

ב. מצא ע"י חישוב את שיעורי הנקודות A, B ו-C בכל אחד מהגרפים.

פתרון

א) $f(x) = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

(3)



הנקודה C מתארת את נקודת הקיצון של הפונקציה:

$$f(3) = \frac{4 \cdot 1}{2^2} = 1$$

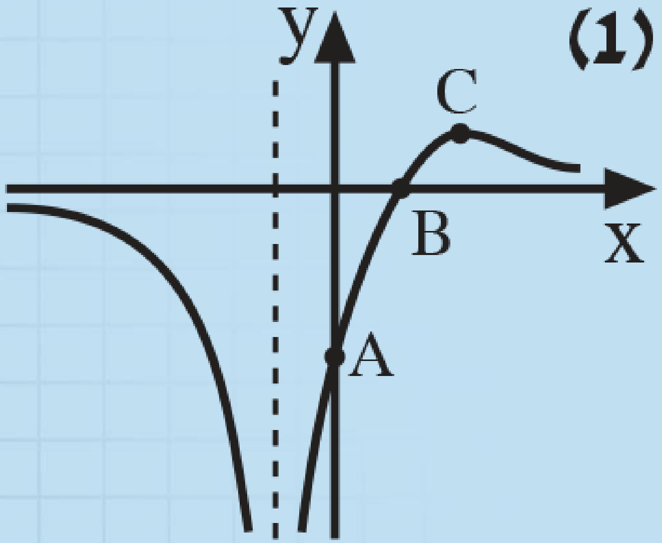
$C: (3, 1)$

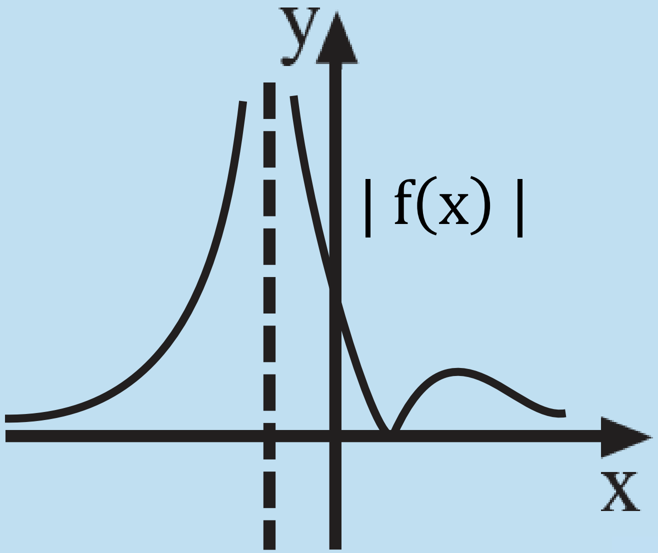
ג. סעיף זה מתייחס לפונקציה $f(x)$ שבציור (1). (1) שרטט את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$.

פתרון

ב) $f(x) = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$

(1)

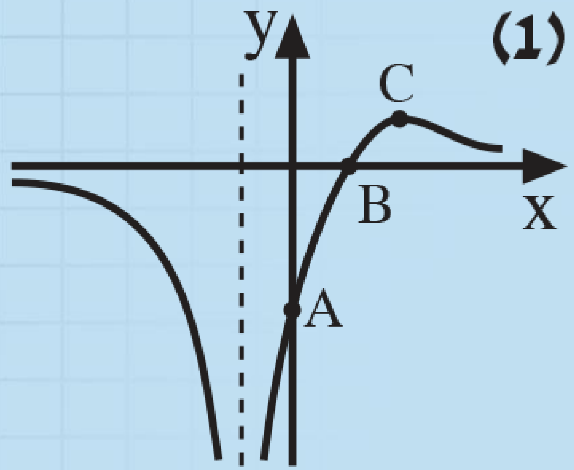


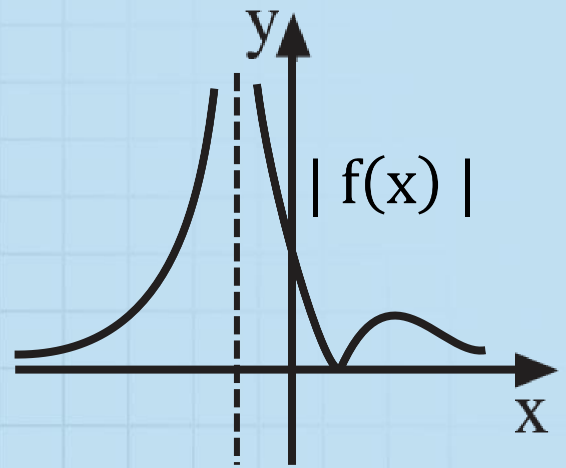


ג. (1)

ג. סעיף זה מתייחס לפונקציה $f(x)$ שבציור (1). (2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$.

פתרון





ג. (1)

נקודת המקסימום C

נותרה ללא שינוי : $C\ (3,1)$

נקודת החיתוך עם ציר x

הפכה כעת לנקודת מינימום : $B\ (1,0)$

ד. סעיף זה מתייחס לפונקציה $f(x)$ שבציור (3). $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $\mathbf{g''(x) = f(x)}$ עבור $x > 1$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

פתרון

א) $f(x) = \dfrac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

נדרוש: $g''(x) = 0$

$$g''(x) = f(x) = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

$$x = 2$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות ערך הנגזרת השלישית $g'''(x)$

ד. סעיף זה מתייחס לפונקציה $f(x)$ שבציור (3). $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g''(x) = f(x)$ עבור $x > 1$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

פתרון

א) $f(x) = \dfrac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות ערך הנגזרת השלישית $g'''(x)$

$$g'''(x) = f'(x) = \frac{4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4}$$

$$f'(2) = \frac{4 \cdot 1 \cdot 1}{1^4} \neq 0$$

עבור $x = 2$ לפונקציה $g(x)$ נקודת פיתול

ד. סעיף זה מתייחס לפונקציה $f(x)$ שבציור (3). $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g''(x) = f(x)$ עבור $x > 1$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

פתרון

א) $f(x) = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה ייקבעו עפ"י סימן הנגזרת השנייה

$$g''(x) = f(x) = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$$

נוכל לקבוע תחומים אלו על סמך גרף הפונקציה

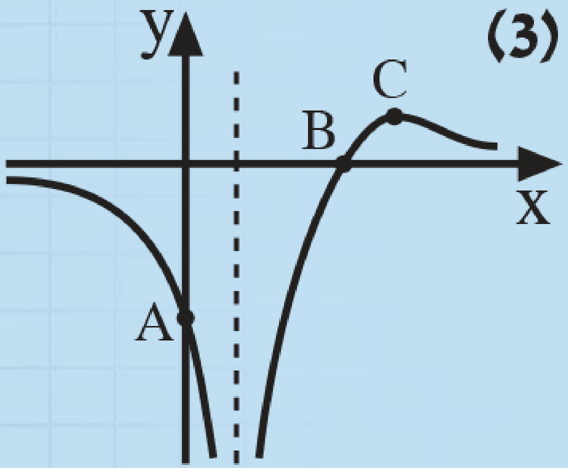
ד. סעיף זה מתייחס לפונקציה $f(x)$ שבציור (3). $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g''(x) = f(x)$ עבור $x > 1$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ∪ וכלפי מטה ∩ שלה.

פתרון

א) $f(x) = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2}$

(3)



נשלב את תחום ההגדרה

של הפונקציה $g(x)$, $x > 1$

תחומי קעירות כלפי מעלה ∪ : $2 < x$

תחומי קעירות כלפי מטה ∩ : $1 < x < 2$

(2) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של g’(x) ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ∪ וכלפי מטה ∩ שלה.

פתרון

נדרוש: $g'''(x) = 0$

$$g'''(x) = f'(x) = \frac{4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4}$$

עפ"י סעיף ב': $x = 3$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות תחומי קעירות

(2) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g'(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

פתרון

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות תחומי קעירות

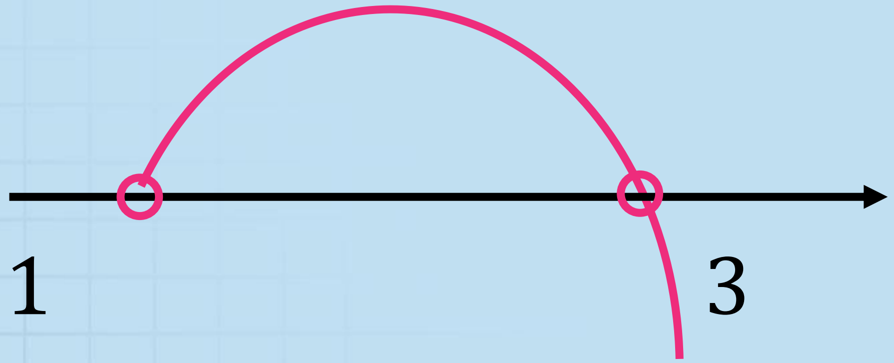
$$g'''(x) = f'(x) = \frac{4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4}$$

המכנה חיובי לכל x מוגדר ולכן הסימן ייקבע עפ״י המונה,
המתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = 1,3$

(2) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g'(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

פתרון

$$g'''(x) = f'(x) = \frac{4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4}$$

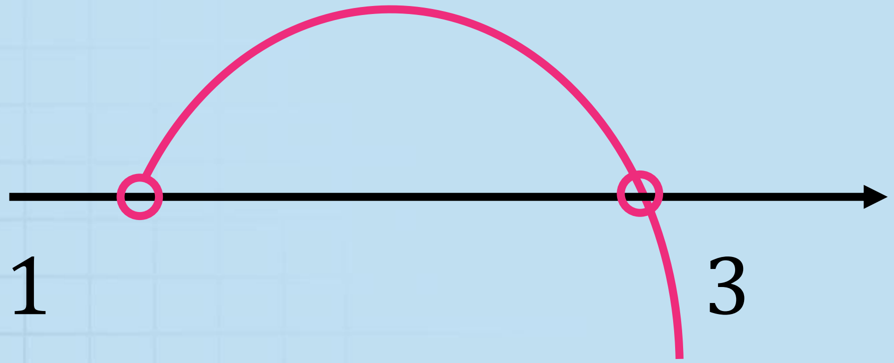


עבור $x = 3$ הפונקציה משנה תחום קעירות ולכן מדובר בנקודת פיתול

(2) מצא את שיעור ה-x של נקודת הפיתול של $g'(x)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ שלה.

פתרון

$$g'''(x) = f'(x) = \frac{4(x-1)(-x+3)}{(x-1)^4}$$



תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$:

$1 < x < 3$

תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$:

$3 < x$

בהצלחה