פתרון תרגיל

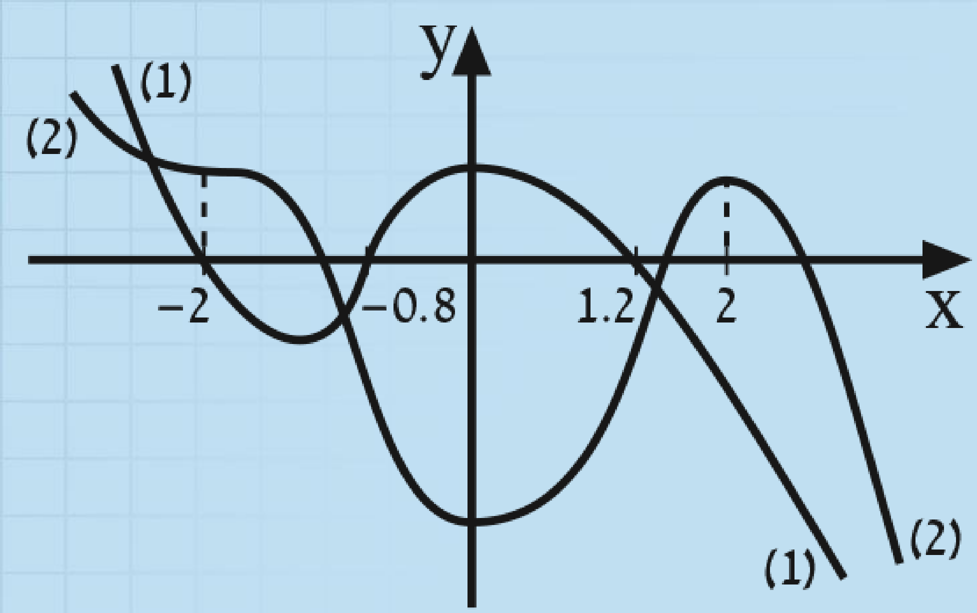
פיתול וקעירות – הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 184, ת. 10

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה



10) בציור מתוארים שני גרפים: גרף (1) וגרף (2).
אחד מהגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר הוא של הפונקציה $f''(x)$. ידוע שבתחום $x<0$ יש לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות פיתול.

א. קבע איזה גרף מתאר את $f(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f''(x)$. נמק.

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x ואת שיעור ה-x של נקודת ההשקה של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x.

ה. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ וקבע את סוגן.

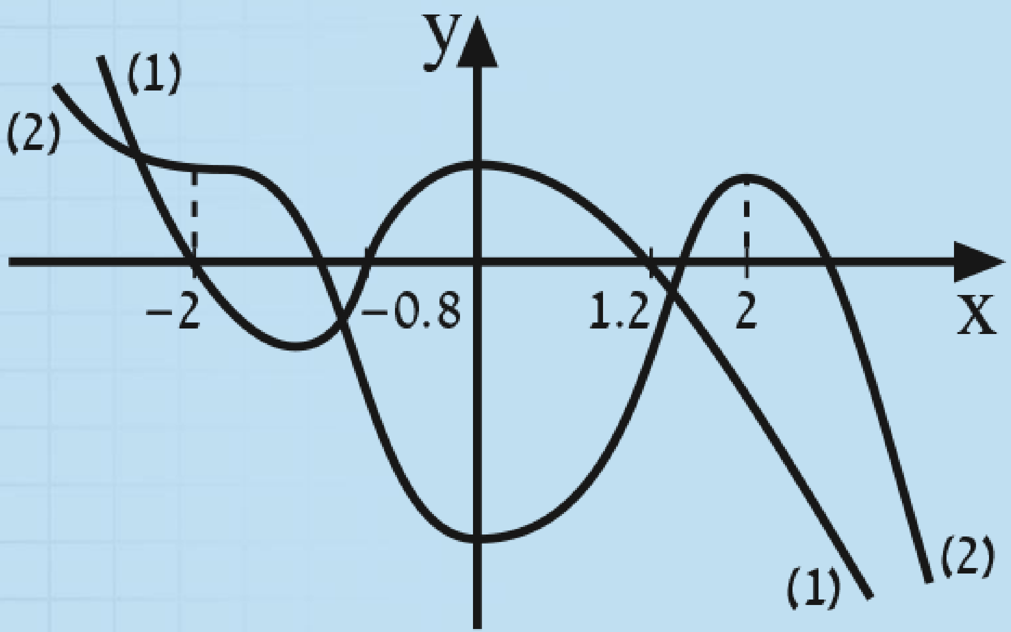
ו. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f'(x)$.

ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

ח. נתון שהגרף שמספרו (1) חותך את ציר ה-y בנקודה $(0,0.7)$. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f'(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

א. קבע איזה גרף מתאר את $f(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f''(x)$. נמק.

פתרון



לפונקציה $f(x)$ שתי נקודות פיתול
בתחום $x < 0$

$\Downarrow$

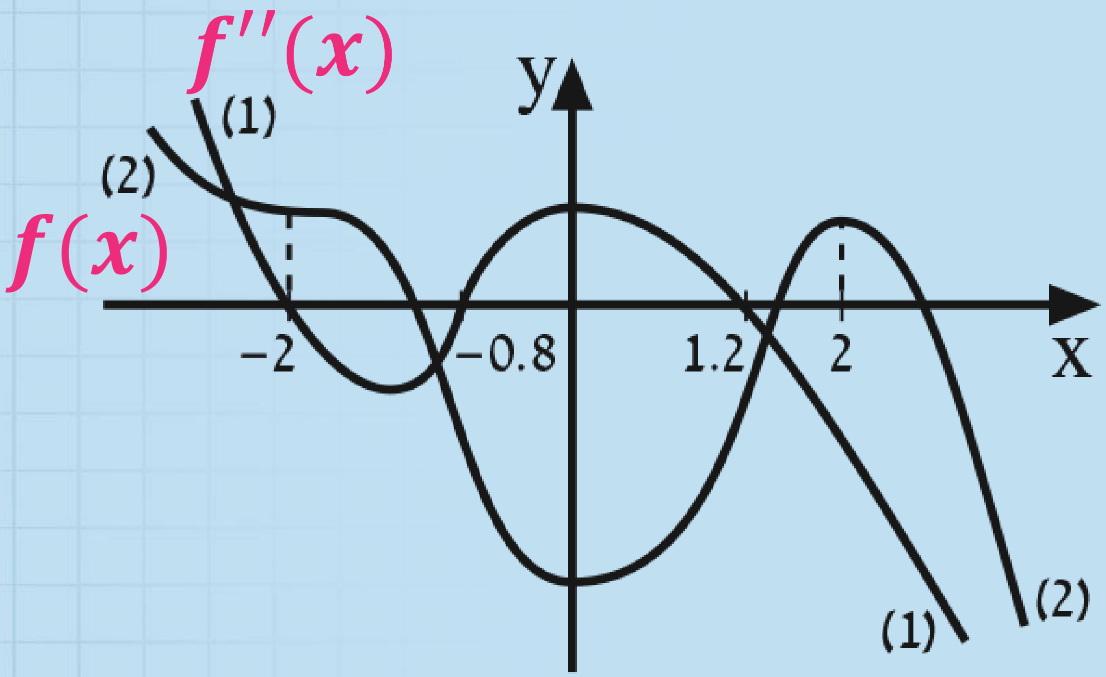
לנגזרת השנייה $f''(x)$ שתי נקודות
חיתוך עם ציר x בתחום $x < 0$

גרף הפונקציה $f(x)$ מתואר ע"י גרף (2)
גרף הנגזרת $f''(x)$ מתואר ע"י גרף (1)

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה f(x).

פתרון

כאשר לגרף הנגזרת השנייה $f''(x)$
יש נקודת חיתוך עם ציר x והיא
משנה סימן,
לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול

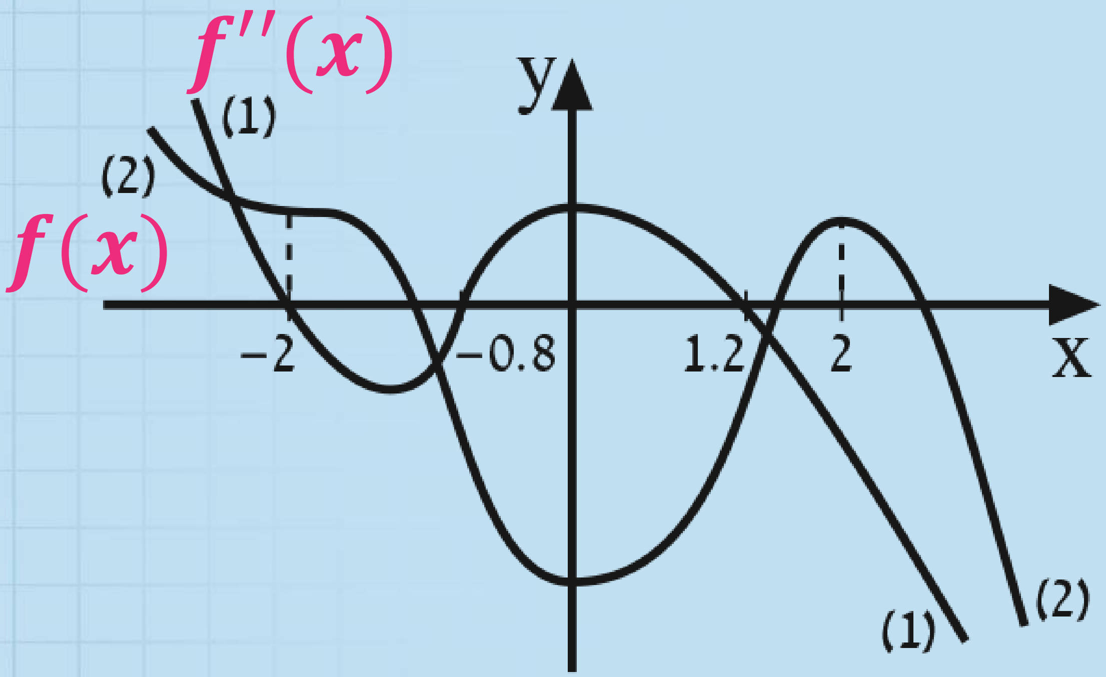


$$f''(-2) = f''(-0.8) = f''(1.2) = 0$$

עבור ערכי $x = -2, -0.8, 1.2$
לפונקציה $f(x)$ **נקודות פיתול**

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ∪ וכלפי מטה ∩ של הפונקציה f(x).

פתרון

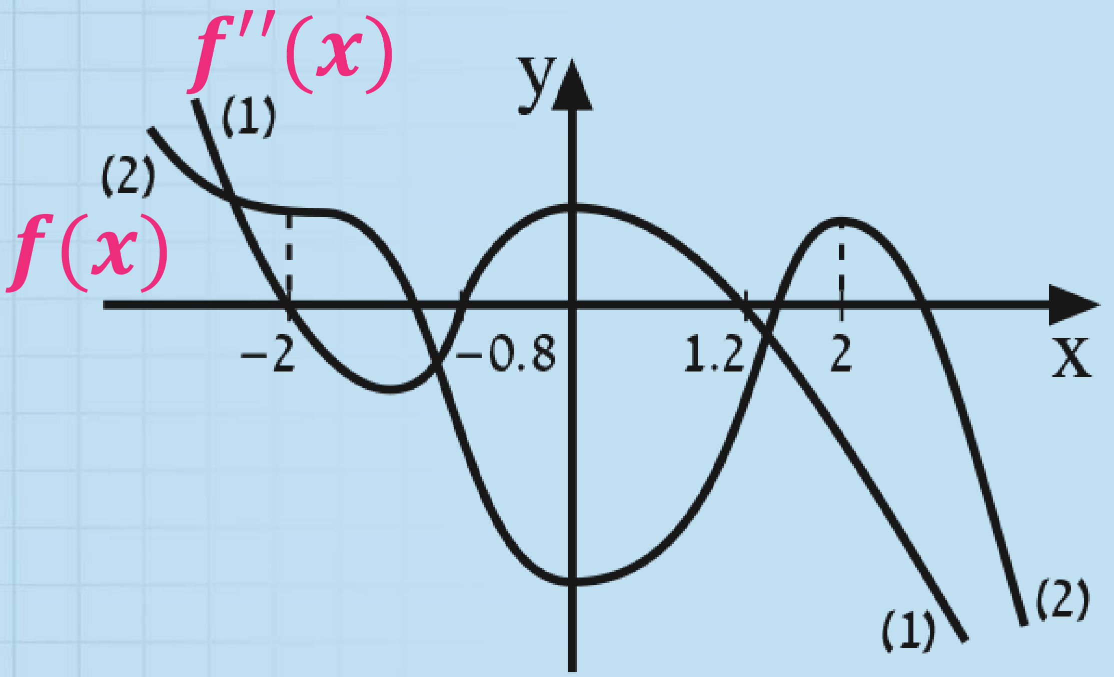


כאשר הנגזרת השנייה $f''(x)$
חיובית, הפונקציה $f(x)$ תהיה
קעורה כלפי מעלה ∪

$f''(x)$ חיובית בתחום
$x < -2$ או $-0.8 < x < 1.2$
ולכן בתחום זה הפונקציה $f(x)$
קעורה כלפי מעלה ∪

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

פתרון



כאשר הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית, הפונקציה $f(x)$ תהיה קעורה כלפי מטה $\cap$

$f''(x)$ שלילית בתחום

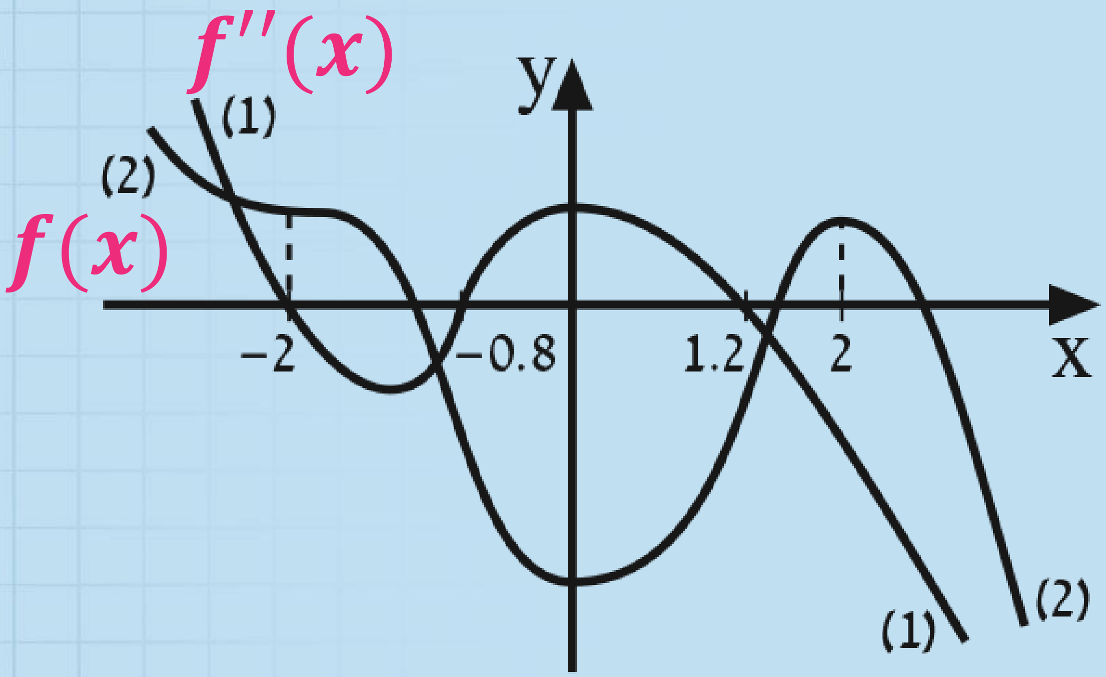
$-2 < x < -0.8$ **או** $1.2 < x$

ולכן בתחום זה הפונקציה $f(x)$

קעורה כלפי מטה $\cap$

ד. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x ואת שיעור ה-x של נקודת ההשקה של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x.

פתרון



כאשר לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון פנימיות,
לגרף הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר x **והיא משנה סימן**

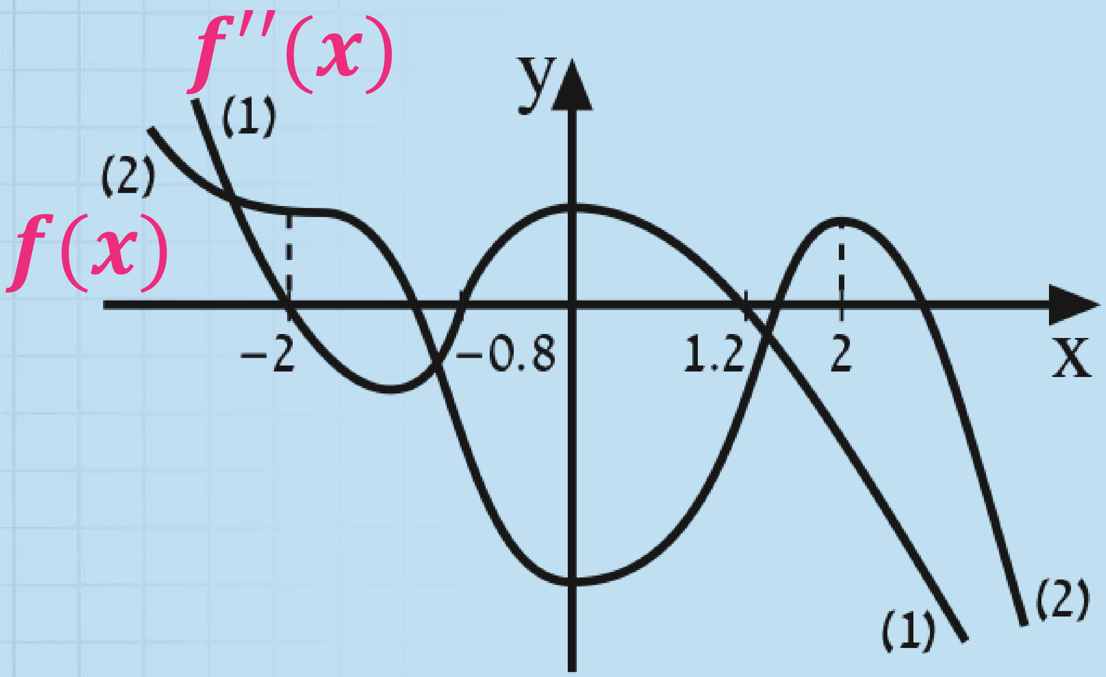
לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון פנימיות עבור $x = 0,2$

$$\Downarrow$$

$$f'(0) = f'(2) = 0$$

ד. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x ואת שיעור ה-x של נקודת ההשקה של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x.

פתרון

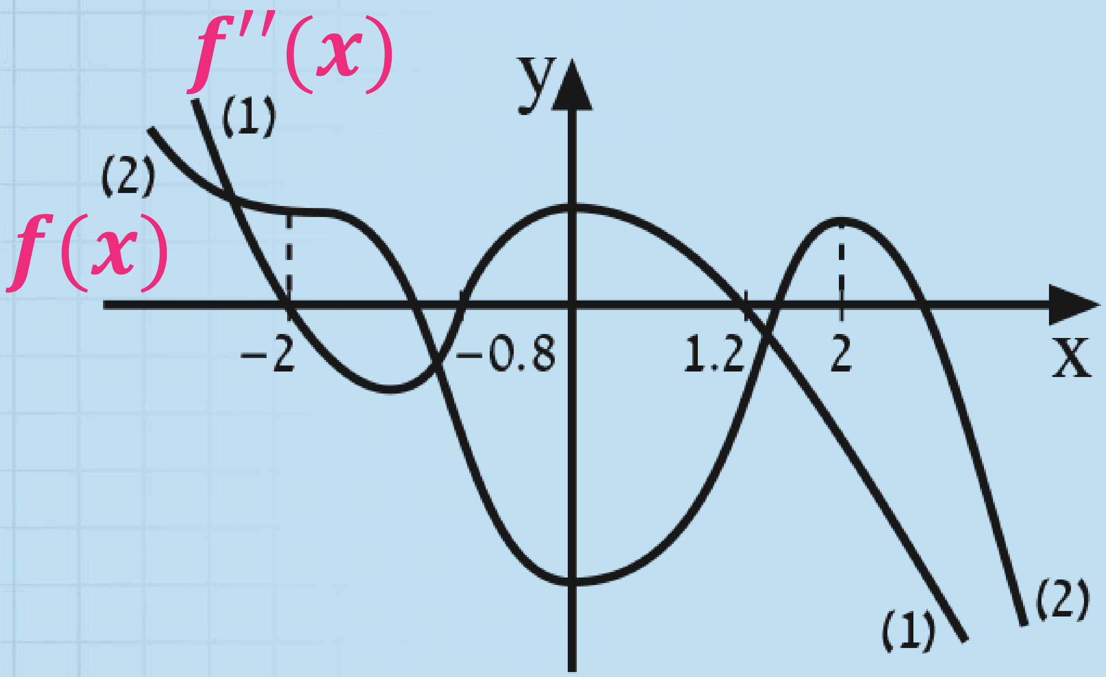


הנגזרת $f'(x)$ תשיק לציר x בנקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$, בה המשיק מקביל לציר x (או מתלכד אתו)

$$x = -2$$

ה. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון



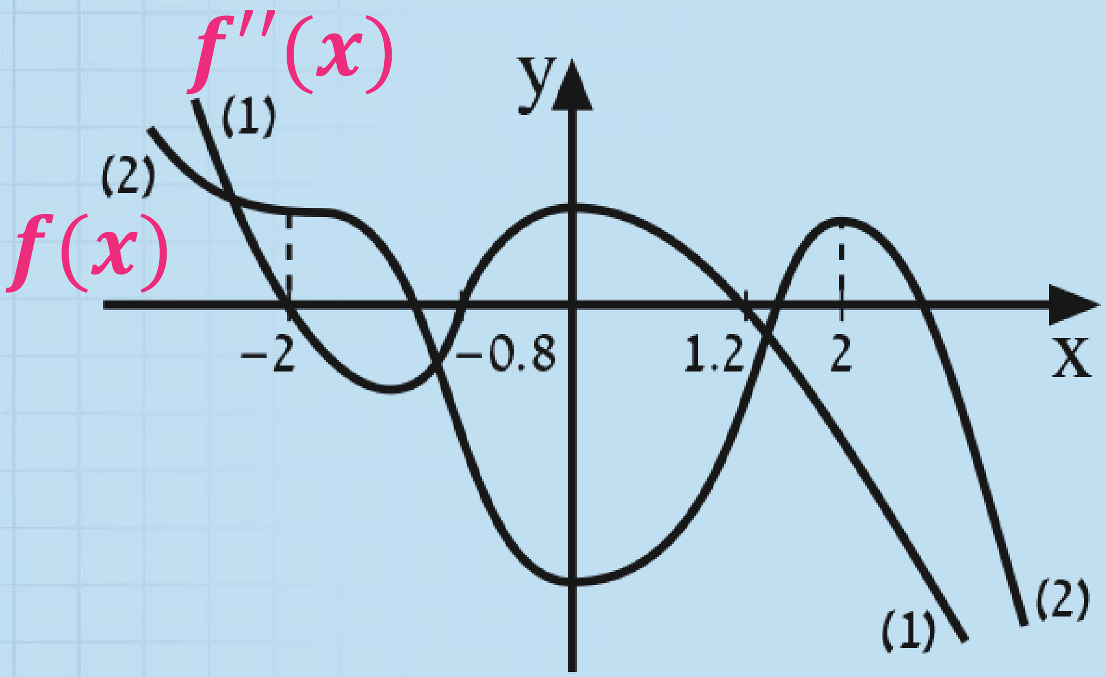
כאשר לגרף הנגזרת $f''(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר x **והיא משנה סימן**, לגרף הפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית

$$f''(-2) = 0$$

בנקודה זו גרף הנגזרת $f''(x)$ משנה תחום מחיוביות לשליליות ולכן לפונקציה $f'(x)$ יש בנקודה $x = -2$ **נקודת קיצון מסוג מקסימום**

ה. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה f'(x) וקבע את סוגן.

פתרון



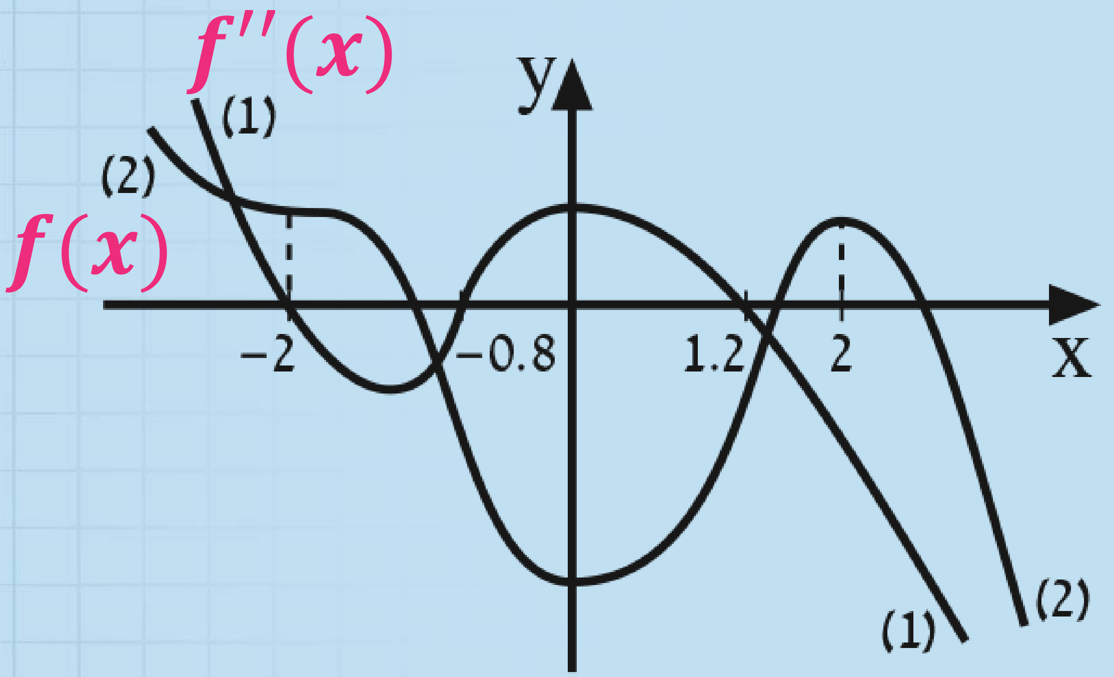
כאשר לגרף הנגזרת $f''(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר x **והיא משנה סימן**, לגרף הפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית

$$f''(-0.8) = 0$$

בנקודה זו גרף הנגזרת $f''(x)$ משנה תחום משליליות לחיוביות ולכן לפונקציה $f'(x)$ יש בנקודה $x = -0.8$ **נקודת קיצון מסוג מינימום**

ה. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ וקבע את סוגן.

פתרון



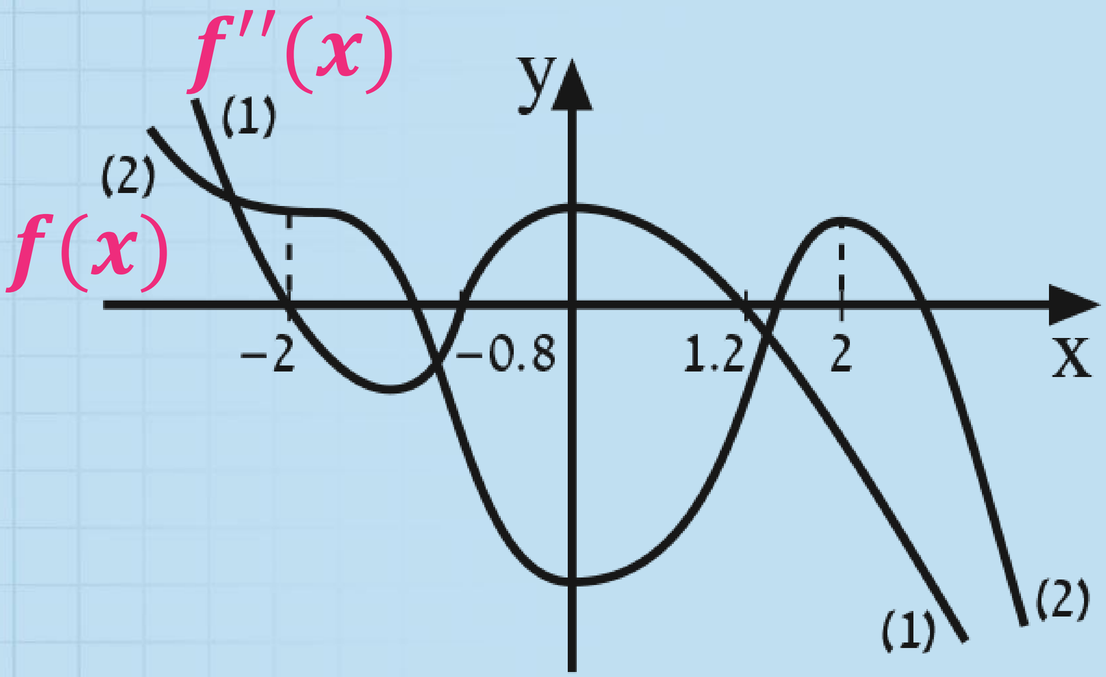
כאשר לגרף הנגזרת $f''(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר x **והיא משנה סימן**, לגרף הפונקציה $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית

$$f''(1.2) = 0$$

בנקודה זו גרף הנגזרת $f''(x)$ משנה תחום מחיוביות לשליליות ולכן לפונקציה $f'(x)$ יש בנקודה $x = 1.2$ **נקודת קיצון מסוג מקסימום**

ו. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f'(x)$.

פתרון

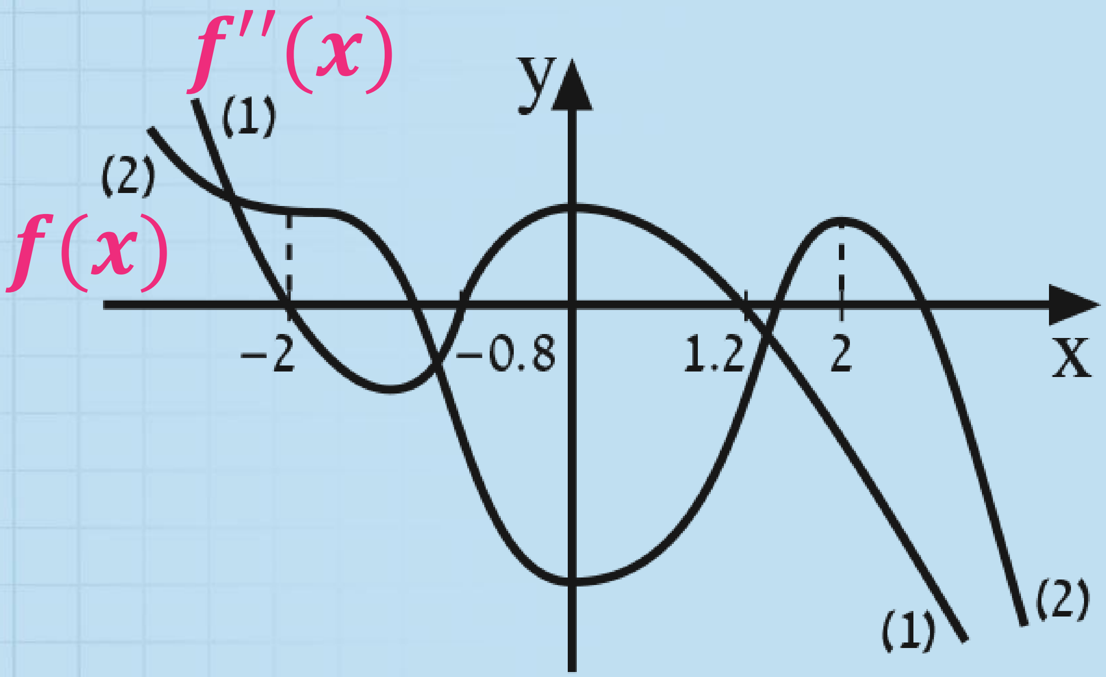


כאשר הפונקציה $f(x)$ עולה,
הנגזרת $f'(x)$ חיובית

$f(x)$ עולה בתחום $0 < x < 2$
ולכן בתחום זה הנגזרת $f'(x)$ **חיובית**

ו.   מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f'(x)$.

פתרון



כאשר הפונקציה $f(x)$ יורדת,
הנגזרת $f'(x)$ שלילית

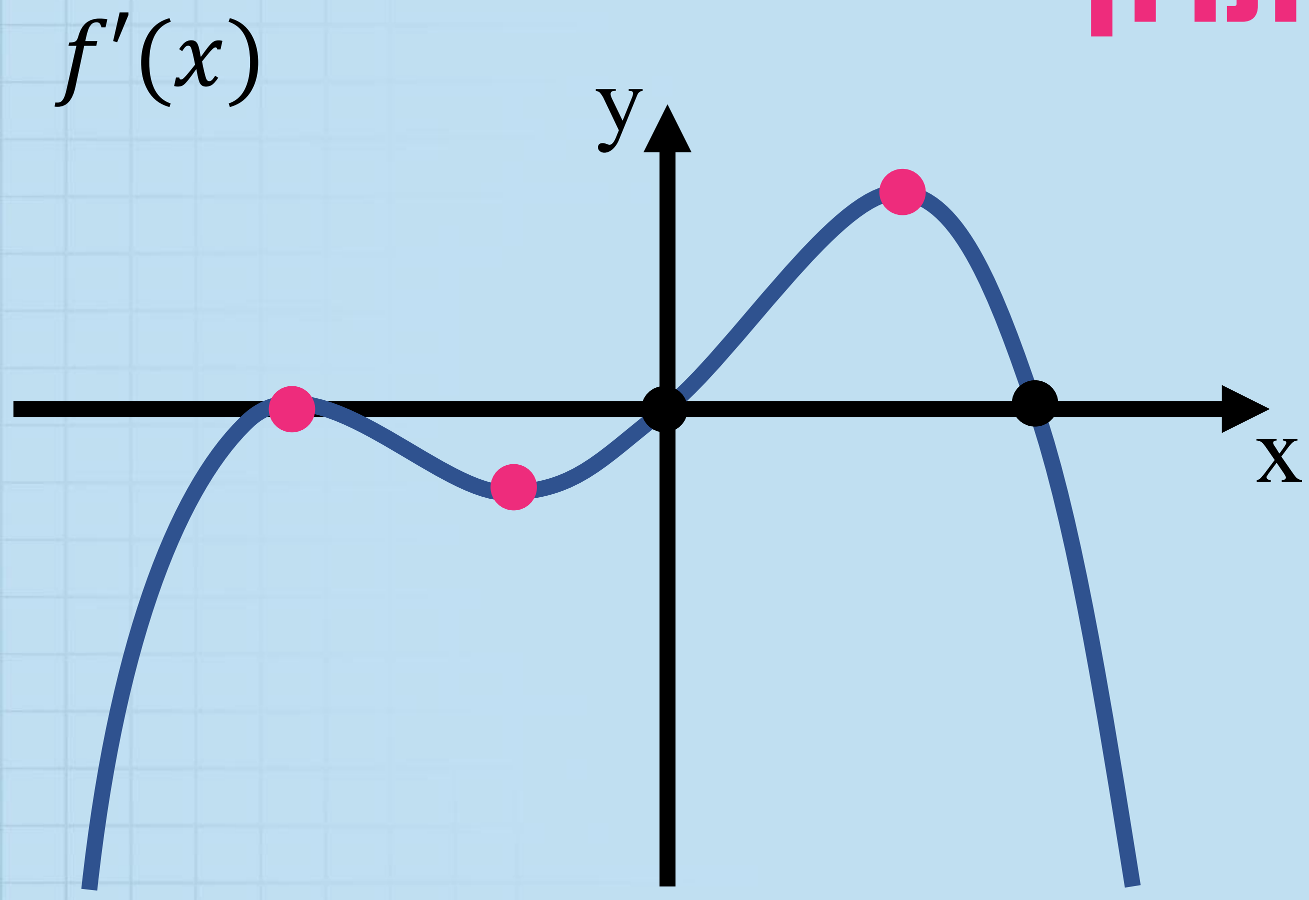
$f(x)$ יורדת בתחום

$0 < x \neq -2$ **או** $x > 2$

ולכן בתחום זה הנגזרת $f'(x)$ **שלילית**

ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

פתרון



$$f'(0) = f'(2) = 0$$

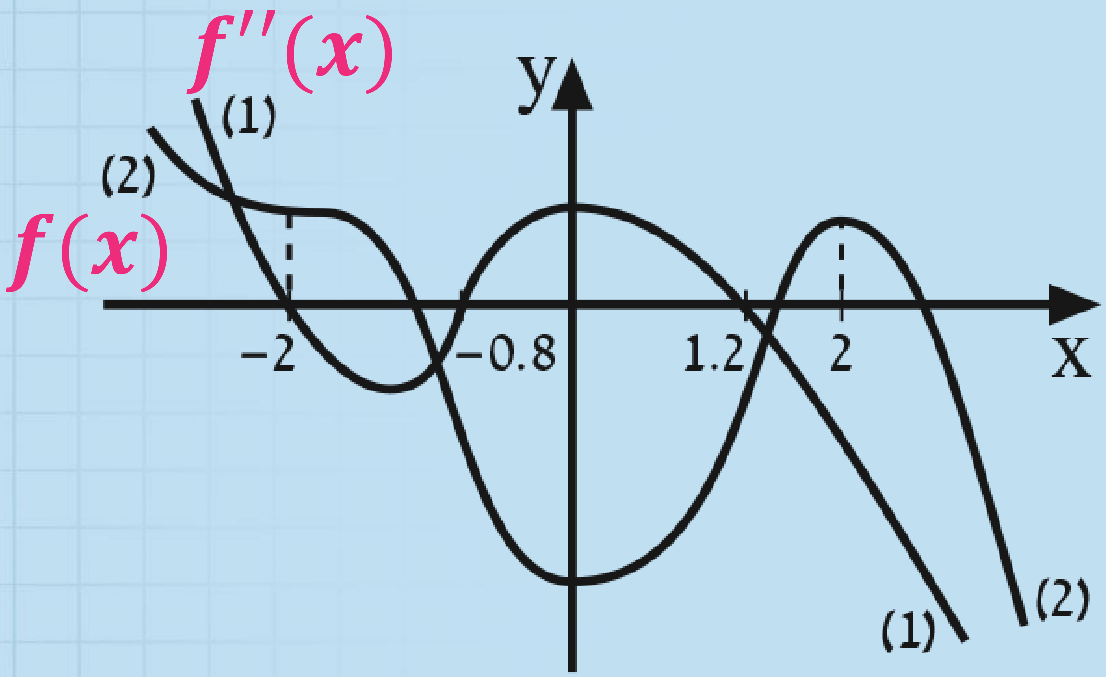
$x = -2$ מקסימום (השקה לציר x)

$x = -0.8$ מינימום

$x = 1.2$ מקסימום

ח. נתון שהגרף שמספרו (1) חותך את ציר ה- y בנקודה $(0,0.7)$. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f'(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

פתרון



שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת השנייה בנקודת ההשקה:

$$m = f''(0) = 0.7$$

נקודת ההשקה, חיתוך הנגזרת הראשונה עם ציר y:

$$f'(0) = 0$$

ח. נתון שהגרף שמספרו (1) חותך את ציר ה-y בנקודה $(0, 0.7)$. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f'(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

פתרון

משוואת משיק ששיפועו $m = 0.7$ העובר דרך הנקודה $(0,0)$

$$y = 0.7x$$

בהצלחה