פתרון תרגיל

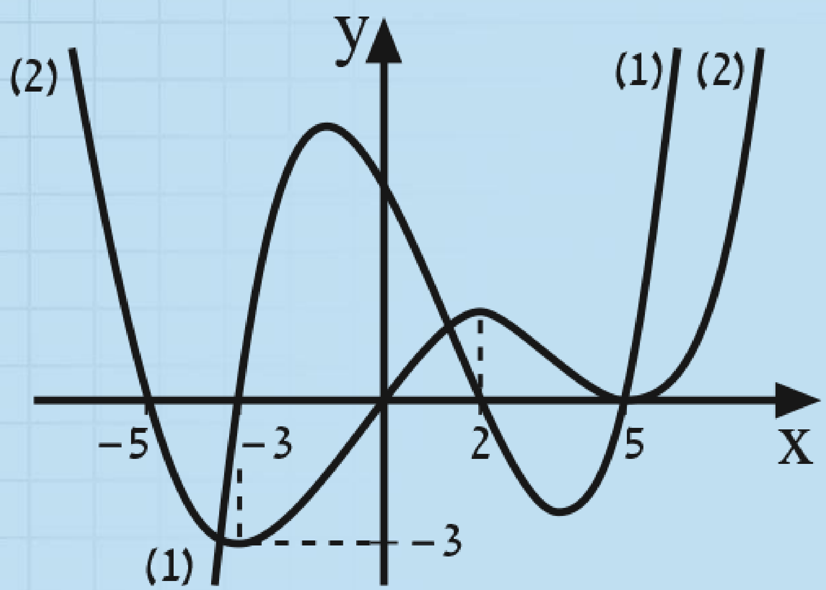
פיתול וקעירות – הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 182, ת. 7

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה



7) בציור מתוארים שני גרפים: גרף (1) וגרף (2).
אחד מהגרפים הוא של הפונקציה $f'(x)$ והאחר הוא של הפונקציה $f''(x)$.

א. קבע איזה גרף מתאר את $f'(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f''(x)$. נמק.

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ג. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

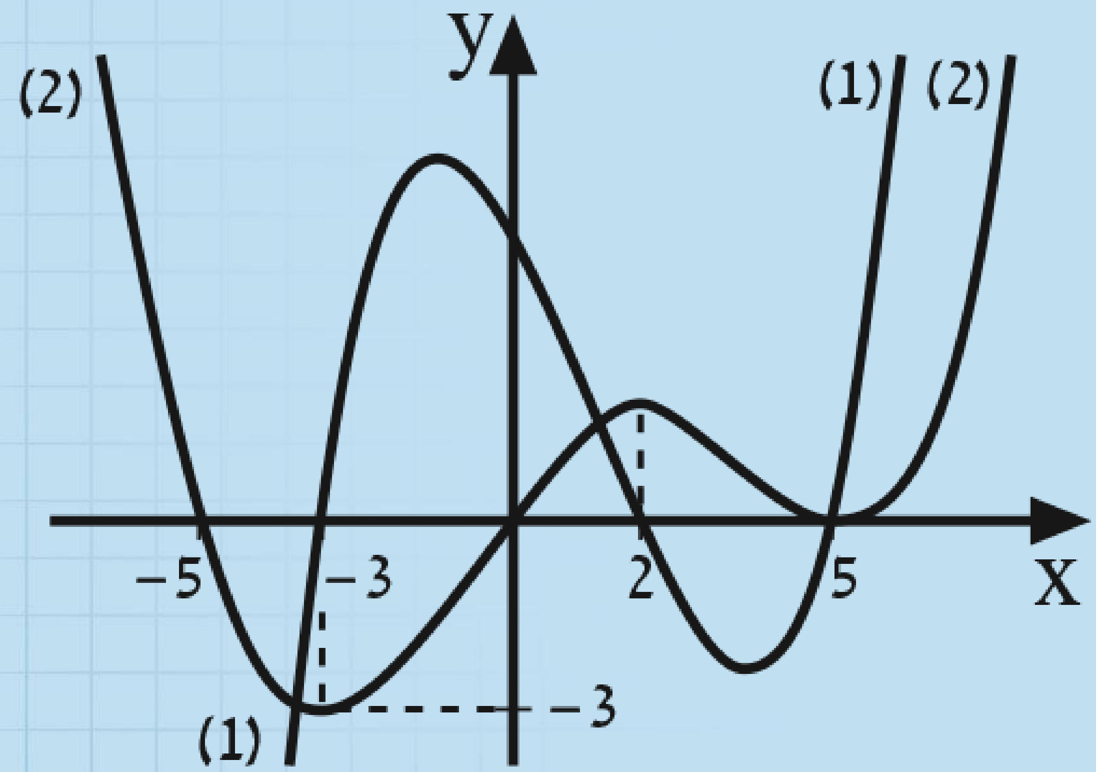
ד. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$.

ה. מצא את שיעור ה-x של הנקודה שבה יש לפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול שהמשיק בה מקביל לציר ה-x (או מתלכד איתו).

ו. מצא את הזווית שהמשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = -3$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

א. קבע איזה גרף מתאר את $f'(x)$ ואיזה גרף מתאר את $f''(x)$. נמק.

פתרון



כאשר גרף הנגזרת $f''(x)$ חותך את ציר x, לגרף הפונקציה $f'(x)$ תהיה נקודת קיצון

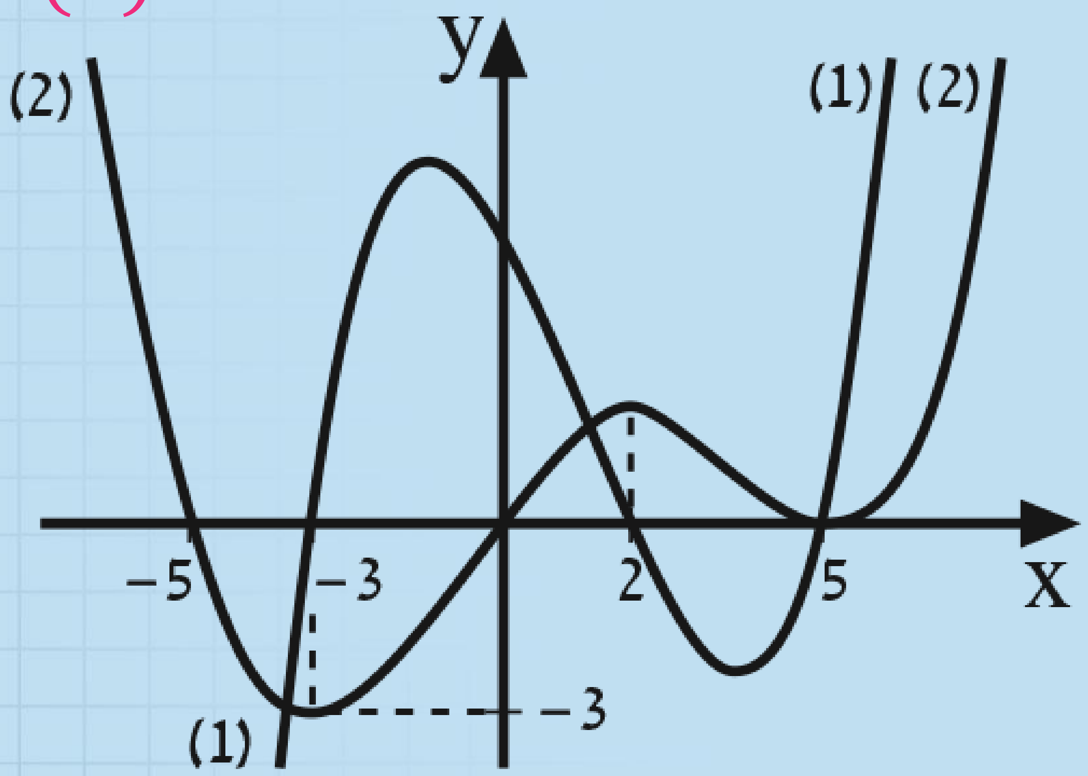
בנקודה $x=-5$ גרף (2) חותך את ציר ה- x אבל לגרף (1) **אין** נקודת קיצון

גרף הפונקציה $f'(x)$ מתואר ע"י גרף (2)
גרף הנגזרת $f''(x)$ מתואר ע"י גרף (1)

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה f(x) וקבע את סוגן.

פתרון

$f'(x)$



$f''(x)$

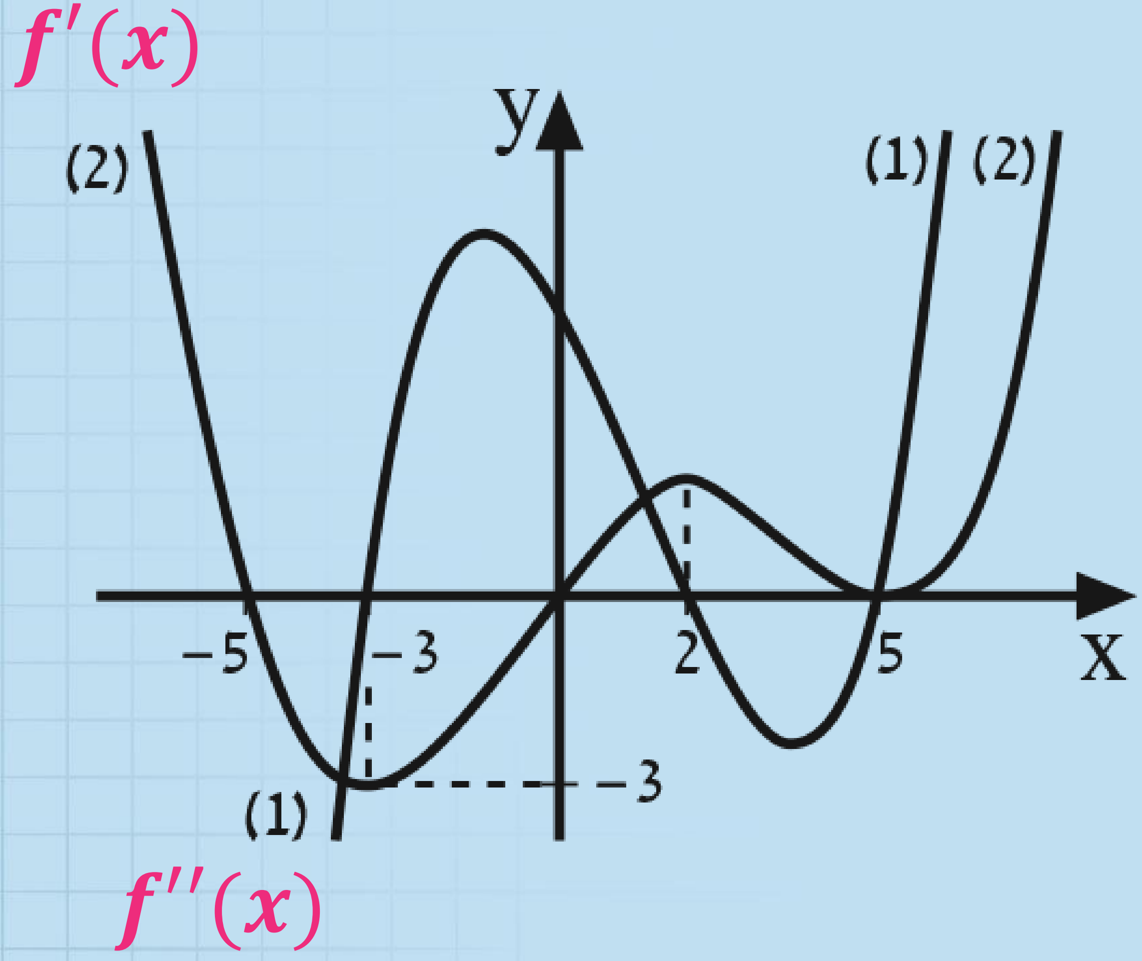
כאשר לגרף הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר x **והיא משנה סימן**, לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון פנימית

$$f'(-5)=0$$

בנקודה זו גרף הנגזרת $f'(x)$ משנה תחום מחיוביות לשליליות ולכן לפונקציה $f(x)$ יש בנקודה $x=-5$ **נקודת קיצון מסוג מקסימום**

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה f(x) וקבע את סוגן.

פתרון



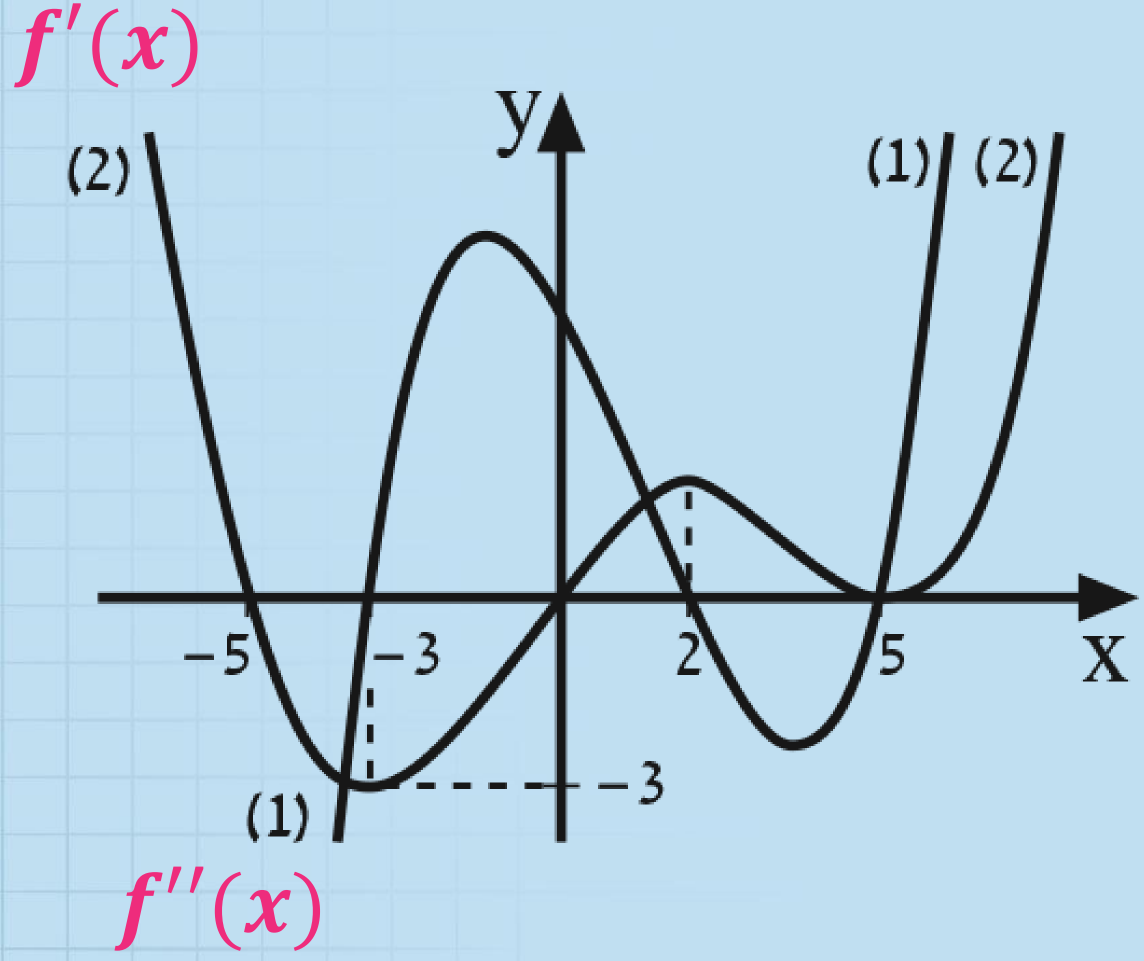
כאשר לגרף הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר x **והיא משנה סימן**, לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון פנימית

$$f'(0) = 0$$

בנקודה זו גרף הנגזרת $f'(x)$ משנה תחום משליליות לחיוביות ולכן לפונקציה $f(x)$ יש בנקודה **$x = 0$ נקודת קיצון מסוג מינימום**

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה f(x) וקבע את סוגן.

פתרון



כאשר לגרף הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת חיתוך עם ציר x **והיא משנה סימן**, לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון פנימית

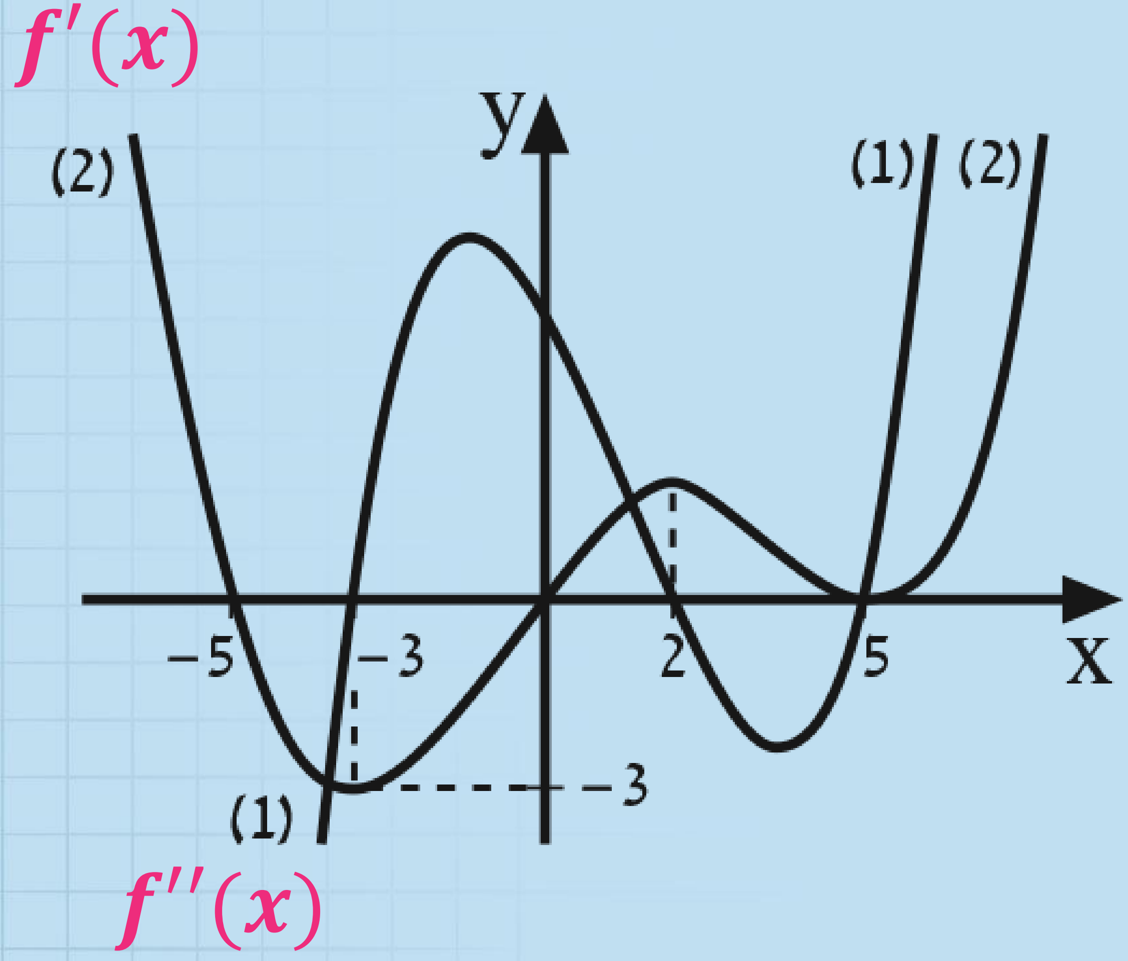
חשוב לשים לב!

אמנם $f'(5)=0$ אבל הנגזרת אינה משנה סימן ולכן לא מדובר בנקודת קיצון פנימית עבור הפונקציה $f(x)$

ג. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה f(x).

פתרון

כאשר לגרף הנגזרת השנייה $f''(x)$
יש נקודת חיתוך עם ציר x והיא
משנה סימן,
לגרף הפונקציה $f(x)$ נקודת פיתול



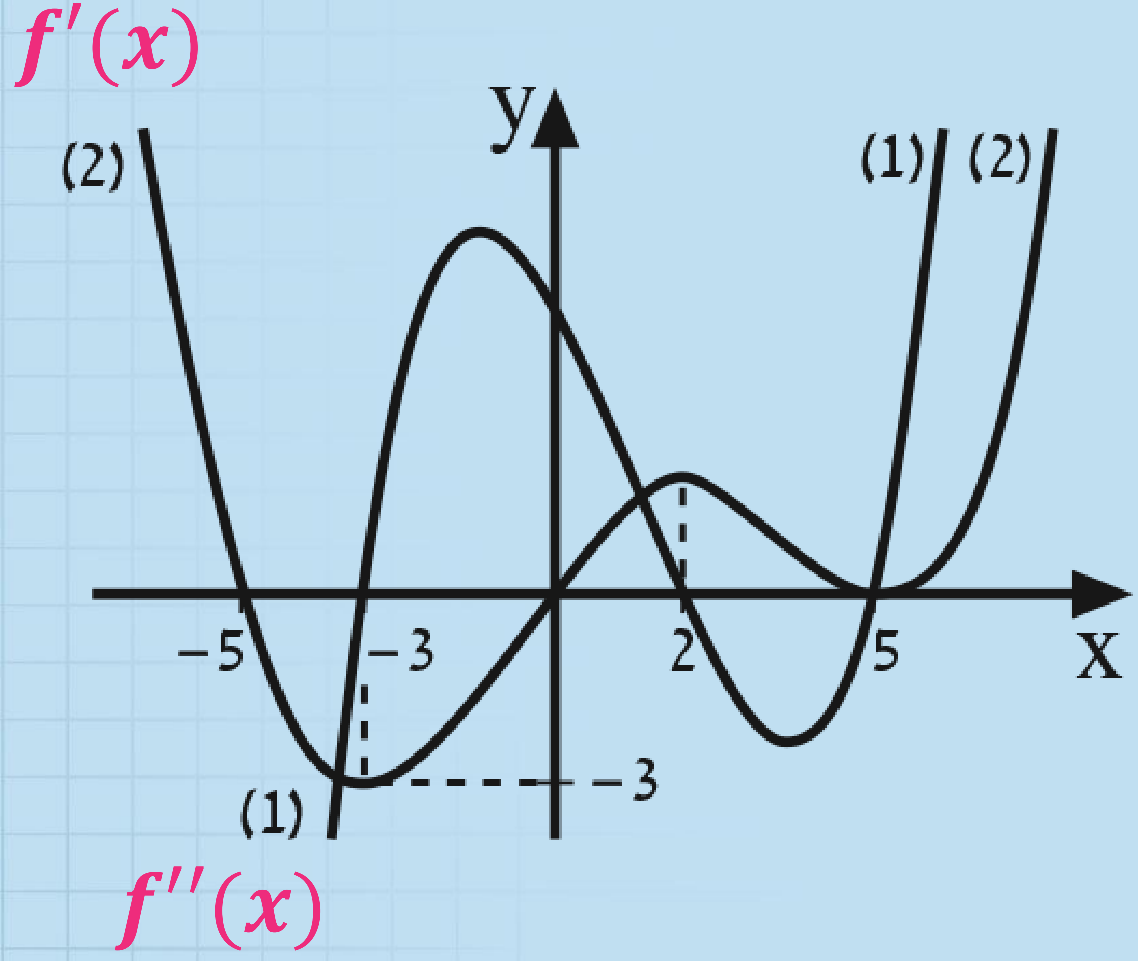
$$f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$$

עבור ערכי $x = -3,2,5$ לפונקציה $f(x)$

נקודות פיתול

ד. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה ∪ וכלפי מטה ∩ של הפונקציה $f(x)$.

פתרון



כאשר הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית, הפונקציה $f(x)$ תהיה קעורה כלפי מעלה ∪

$f''(x)$ חיובית בתחום

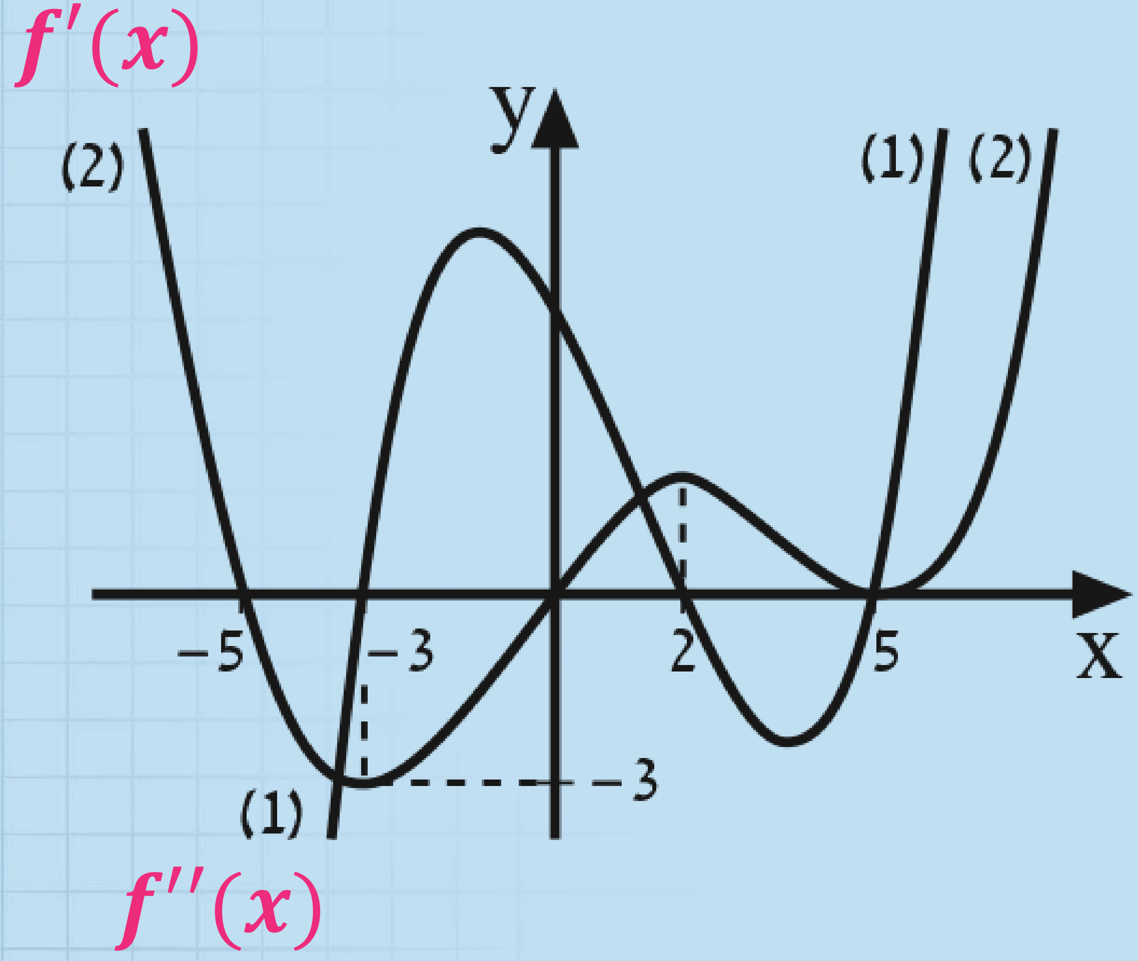
$-3 < x < 2$ **או** $5 < x$

ולכן בתחום זה הפונקציה $f(x)$

קעורה כלפי מעלה ∪

ג. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה f(x).

פתרון



כאשר הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית, הפונקציה $f(x)$ תהיה קעורה כלפי מטה ∩

$f''(x)$ שלילית בתחום

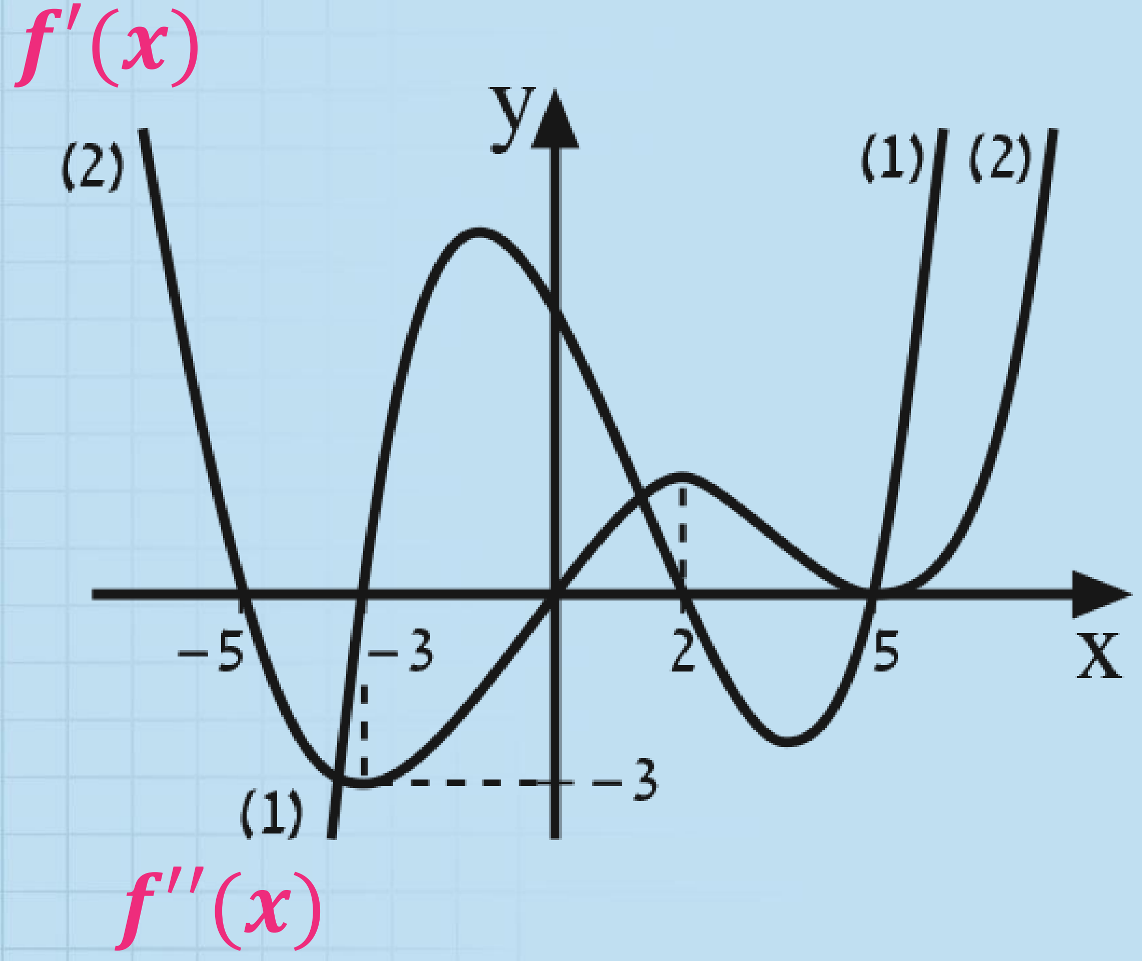
$2 < x < 5$ **או** $x < -3$

ולכן בתחום זה הפונקציה $f(x)$

קעורה כלפי מטה ∩

ה. מצא את שיעור ה-x של הנקודה שבה יש לפונקציה f(x) נקודת פיתול שהמשיק בה מקביל לציר ה-x (או מתלכד איתו).

פתרון



נקודת פיתול עבור הפונקציה $f(x)$ תתקבל עבור נקודת קיצון פנימית של הנגזרת הראשונה $f'(x)$

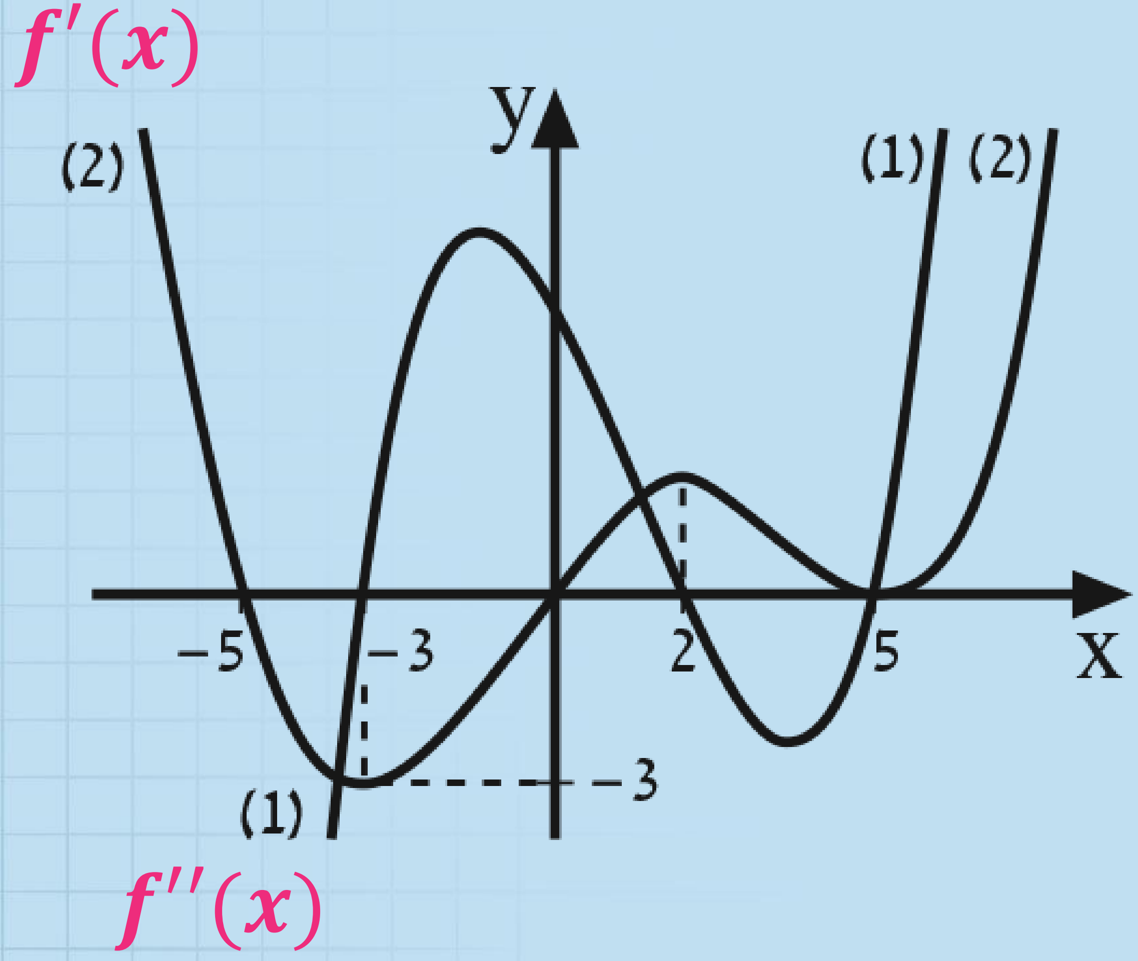
על מנת שהמשיק יקביל לציר x, עלינו לדרוש ששיפועו יהיה $m=0$

כלומר, עלינו לחפש נקודת קיצון של הנגזרת הראשונה $f'(x)$ ששיעור ה- y שלה הוא 0

$$x=5$$

ו. מצא את הזוית שהמשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = -3$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

פתרון



שיפוע משיק לגרף הפונקציה שווה לערך הנגזרת בנקודת ההשקה, ול- tg הזווית הנוצרת בין המשיק לבין הכיוון החיובי של ציר x ונגד כיוון השעון

$$tg\,\alpha = m = f'(-3) = -3$$

באמצעות מחשבון: $\alpha = -71.57°$

$$\boldsymbol{\alpha = 180° - 71.57° = 108.43°}$$

בהצלחה