# פתרון תרגיל

## נקודות פיתול, קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה – פונקציות עם שורשים

## מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'-2

**581 , עמ' 180, ת. 12**

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

# השאלה

חקור את הפונקציות הבאות עבור $a > 0$

א) תחום הגדרה.

ב) נקודות קיצון.

ג) תחומי עלייה וירידה.

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

ו) נקודות פיתול. (סמן אותן על הגרף).

ז) תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

ח) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ט': שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.

12) $$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$$

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ א) תחום הגדרה.

# פתרון

**תחום הגדרה:** $x \geq 0$ $\sqrt{x} \neq 0$

$x \neq 0$

**חיתוך בין התנאים:** $x > 0$

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ ב) נקודות קיצון.

# פתרון

**נדרוש: $y'(x) = 0$**

$$y'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x+a) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2x - x - a}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-a}{2x\sqrt{x}} = 0$$

$$x = a$$

**נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $y''(x)$**

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ב)** נקודות קיצון.

# פתרון

$x = a$

**נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $y''(x)$**

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ"י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$(x-a)' = 1$

סימן הנגזרת השנייה חיובי לכל $x$ ובפרט עבור הנקודה החשודה, $x = a$

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ב)** נקודות קיצון.

# פתרון

עבור $x = a$ נקודת מינימום

$$y(a) = \frac{a+a}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a}$$

**$\left(a, 2\sqrt{a}\right)$ נקודת מינימום**

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ ג) תחומי עלייה וירידה.

# פתרון

עד נקודת המינימום, $x = a > 0$ , הפונקציה יורדת ולאחריה היא עולה.
נשלב גם את תחום ההגדרה של הפונקציה $0 < x$

$$\Downarrow$$

**תחום ירידה:** $0 < x < a$

**תחום עלייה:** $a < x$

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

# פתרון

**חיתוך עם ציר $y$ , נדרוש $x = 0$:**

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$ , אין חיתוך עם ציר $y$

**חיתוך עם ציר $x$ , נדרוש $y = 0$:**

$$\frac{x+a}{\sqrt{x}} = 0$$

$$x = -a$$

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x < 0$ , אין חיתוך עם ציר $x$

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

# פתרון

### אסימפטוטה אנכית

הערך $x = 0$ מאפס את המכנה ולא את המונה: $0 + a = a$

$\Downarrow$

**הישר $x = 0$ אסימפטוטה אנכית לציר $x$ של הפונקציה**

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ה)** אסימפטוטות המאונכות לצירים.

# פתרון

**אסימפטוטה אופקית**

החזקה המובילה, $x$, במונה ולכן **אין** לפונקציה אסימפטוטה אופקית

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ ו) נקודות פיתול. (סמן אותן על הגרף).

# פתרון

**נדרוש:** $y''(x) = 0$

$$y''(x) = \left(\frac{x-a}{2x\sqrt{x}}\right)' = \frac{1 \cdot 2x\sqrt{x} - (x-a) \cdot 2\left(1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2x\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{2x\sqrt{x} - 2(x-a)\left(\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}\right)}{4x^3} = \frac{2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}(x-a)}{4x^3}$$

$y = \dfrac{x+a}{\sqrt{x}}$ ו) נקודות פיתול. (סמן אותן על הגרף).

# פתרון

$$y''(x) = \frac{2x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}(x-a)}{4x^3} = \frac{\sqrt{x}(2x - 3x + 3a)}{4x^3}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(-x + 3a)}{4x^3} = 0$$

$\mathbf{0 < x}$ $\cancel{x = 0}$ $x = 3a$

**נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות תחומי קעירות**

ו) נקודות פיתול. (סמן אותן על הגרף). $y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$

# פתרון

$$y''(x) = \frac{\sqrt{x}(-x+3a)}{4x^3}$$

בתחום ההגדרה $x > 0$ הביטוי אשר ישפיע על הסימן הוא $-x+3a$
אשר מתאפס עבור $x = 3a$

$4a$: $(-4a+3a) < 0$

$a$: $(-a+3a) > 0$

ו) נקודות פיתול. (סמן אותן על הגרף). $y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$

# פתרון

עבור $x = 3a$ הפונקציה משנה תחום קעירות ולכן מדובר בנקודת פיתול

$$y(3a) = \frac{3a + a}{\sqrt{3a}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{a}$$

**נקודת פיתול** $\left(3a, \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{a}\right)$

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ ז) תחומי קעירות כלפי מעלה ∪ וכלפי מטה ∩.

# פתרון

**תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה ייקבעו עפ"י סימן הנגזרת השנייה**

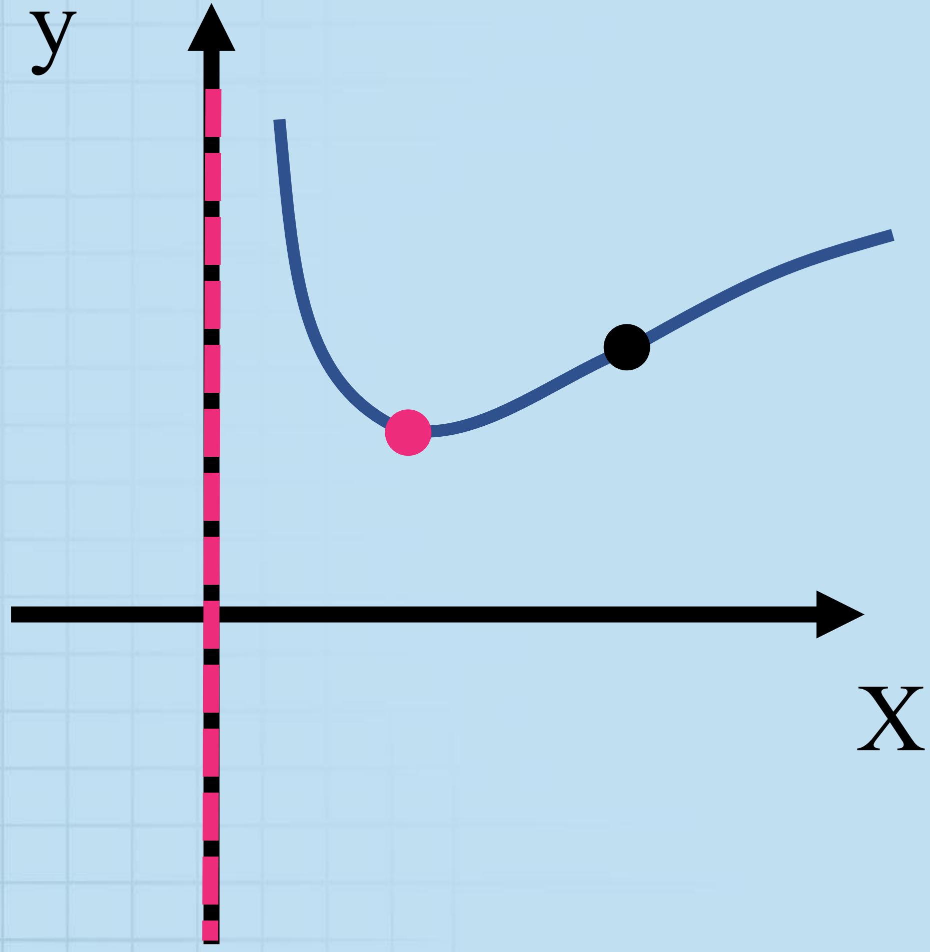
**עפ"י סעיף ו':** $y''(x)$ חיובית בתחום $x < 3a$ ושלילית בתחום $3a < x$

נשלב את תחום ההגדרה של הפונקציה $0 < x$

**תחומי קעירות כלפי מעלה ∪ : $0 < x < 3a$**
**תחומי קעירות כלפי מטה ∩ : $3a < x$**

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ (ח שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

# פתרון




$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ $a > 0$

ט': שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.  $y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$

# פתרון

**תחום הגדרה:** $x > 0$

**נקודות קיצון: אין**

הנקודה החשודה, $x = a$ , כעת מייצגת ערך שלילי עבור $x$ ולכן
אינה חלק מתחום ההגדרה של הפונקציה
אין לפונקציה נקודות קיצון

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ט':** שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.

# פתרון

**תחומי עלייה וירידה:**

$$y'(x) = \frac{x-a}{2x\sqrt{x}} = 0$$

עבור $a < 0$ הביטוי **חיובי** לכל $x$ מוגדר

הפונקציה **עולה** בכל תחום הגדרתה

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ט':** שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.

# פתרון

**חיתוך עם הצירים:**

**חיתוך עם ציר $y$ , נדרוש $x = 0$:**

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$ , אין חיתוך עם ציר $y$

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ט':** שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.

# פתרון

**חיתוך עם הצירים:**

**חיתוך עם ציר $x$ , נדרוש $y = 0$:** $x = -a$

עבור $0 < a$ , מתקבל ערך חיובי ולכן קיימת נקודת חיתוך

$(-a, 0)$

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ט':** שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.

# פתרון

**אסימפטוטות:** אינן מושפעות מערכו של $a$ ולכן יישארו ללא שינוי, $x = 0$

**נקודות פיתול: אין**

הנקודה החשודה, $x = 3a$ , כעת מייצגת ערך שלילי עבור $x$ ולכן
אינה חלק מתחום ההגדרה של הפונקציה
אין לפונקציה נקודות פיתול

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ט'**: שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.

# פתרון

**תחומי קעירות:**

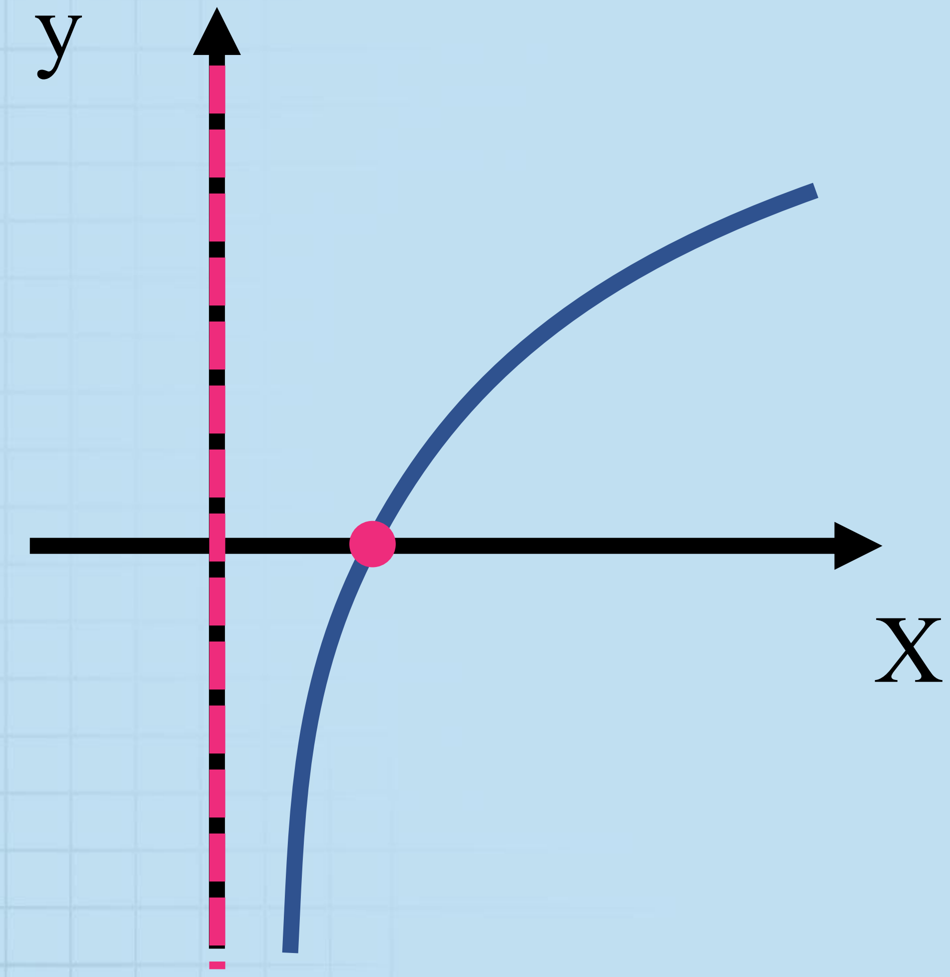
$$y''(x) = \frac{\sqrt{x}(-x+3a)}{4x^3}$$

עבור $a < 0$ הביטוי **שלילי** לכל $x$ מוגדר

הפונקציה **קעורה כלפי מטה** $\cap$ בכל תחום הגדרתה

$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ **ט׳:** שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a < 0$.

# פתרון




$y = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ $\quad a < 0$

# בהצלחה