תרגיל לדוגמה

נקודות פיתול, קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה – פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 174–175, דוגמה

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

דוגמא:

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$. מצא את:

א. נקודת הפיתול של הפונקציה.

ב. תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ והקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה.

תחום הגדרה: $x \neq 0$

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

א. נגזור את הפונקציה שלוש פעמים

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^4}$$

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

נשווה את הנגזרת השנייה לאפס

$$2 - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$x = 1$$

נבדוק את הנקודה החשודה באמצעות ערך הנגזרת השלישית $f'''(x)$

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^4}$$

$$f'''(1) = 6 \neq 0$$

עבור $x = 1$ לפונקציה נקודת פיתול

$$f(1) = 0$$

$(1,0)$ היא נקודת פיתול.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

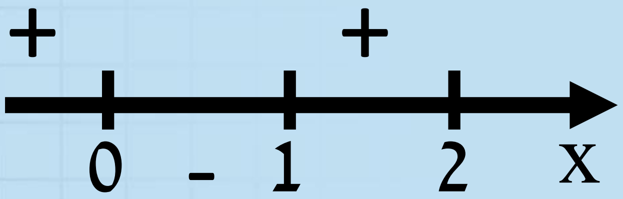
ב. כדי למצוא את התחום בו הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ צריך למצוא את התחום בו הנגזרת השנייה חיובית, כלומר צריך לפתור את אי השוויון $2 - \frac{2}{x^3} > 0$.

באופן דומה, כדי למצוא את התחום בו הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ צריך לפתור את אי השוויון $2 - \frac{2}{x^3} < 0$.

תרגיל לדוגמה

דרך א׳

הביטוי הנ״ל שקול לביטוי $\frac{2x^3-2}{x^3}$. אם נשווה את המונה והמכנה לאפס נקבל $x = 1$, $x = 0$. אם נציב (למשל) $x = 2$ בביטוי הנ״ל נקבל $\frac{7}{4}$ כלומר מספר **חיובי**. לכן הגרף שמתאר את תחומי **החיוביות והשליליות** של הביטוי $\frac{2x^3-2}{x^3}$ ייראה כמו בציור משמאל.



ע״י התבוננות בגרף נוכל לסכם:

הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x < 0$ או $x > 1$, הפונקציה קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $0 < x < 1$.

תרגיל לדוגמה

דרך ב׳ – נציב בנגזרת השנייה $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$ ערכים משני הצדדים של הנקודה $x = 1$ (נקודת הפיתול) והנקודה $x = 0$ (הנקודה שבה הפונקציה לא מוגדרת). נקבל:

$f''(1\frac{1}{2}) > 0$, $f''(\frac{1}{2}) < 0$, $f''(-\frac{1}{2}) > 0$. לכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה $\cup$ בתחום $x > 1$ או $x < 0$ והיא קעורה כלפי מטה $\cap$ בתחום $0 < x < 1$.

תרגיל לדוגמה

הערה:

הנגזרת השלישית של פונקציה רציונאלית היא בהרבה מקרים מסובבת. כדי לקבוע, במקרה כזה, אם נקודה שבה הנגזרת השנייה שווה לאפס היא אכן נקודת פיתול ניתן להסתפק **בנגזרת המונה של הנגזרת השנייה.** (ראה את ההערה שבעמ' 56 לגבי קביעת סוג נקודת הקיצון בפונקציה רציונאלית). דרך נוספת היא ע"י הצבת ערכים משני הצדדים של הנקודה בנגזרת השנייה כפי שעשינו בדרך ב'.

בהצלחה