פתרון תרגיל

חקירת פונקציה –
פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 156, ת. 5

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

5) נתונה הפונקציה $f(x) = x - a\sqrt{x} + b$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(4, -1)$.

א. מצא את a ו-b.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. הוכח את אי השוויון $x - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0$ לכל $x \geq 0$ בשתי דרכים:

(1) בהסתמך על חקירת הפונקציה הנ"ל.

(2) מבלי להסתמך על חקירת הפונקציה הנ"ל.

ז. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

ח. שרטט עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$ את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

נתונה הפונקציה $f(x) = x - a\sqrt{x} + b$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(4, -1)$.

א. מצא את a ו-b.

פתרון

$f'(4) = 0$

$f(4) = -1$

תתקבל מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים

$$f(4) = 4 - a\sqrt{4} + b = -1$$

$$\boldsymbol{b - 2a = -5}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = x - a\sqrt{x} + b$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(4,-1)$.

א. מצא את a ו-b.

פתרון

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = 1 - \frac{a}{2\sqrt{4}} = 0$$

$$\frac{a}{4} = 1$$

$$\boldsymbol{a = 4}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = x - a\sqrt{x} + b$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(4, -1)$.

א. מצא את a ו-b.

פתרון

$$b - 2 \cdot 4 = -5$$

$$\boldsymbol{b = 3}$$

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

תחום הגדרה: $x \geq 0$

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון

חיתוך עם ציר y , נדרוש $x = 0$:

$(0,3)$

$f(0) = 3$

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$

נציב: $t = \sqrt{x}$

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1) = 0$$

$t = 3$ $\qquad$ $t = 1$

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$t = 1$ $t = 3$

$\sqrt{x} = 1$ $\sqrt{x} = 3$

$\boldsymbol{x = 1}$ $\boldsymbol{x = 9}$

$(1, 0)$

$(9, 0)$

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

תחומי עלייה וירידה יקבעו עפ"י סימן הנגזרת הראשונה.

נדרוש: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{4}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

$x = 4$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ״י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הנגזרת של המונה:

$$(\sqrt{x} - 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

$x = 4$

סימן הנגזרת השנייה חיובי לכל x ובפרט עבור הנקודה החשודה, $x = 4$

עבור $x = 4$ נקודת מינימום

$f(4) = -1$

$(4, -1)$ נקודת מינימום

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

עד נקודת המינימום, $x = 4$, הפונקציה יורדת ולאחריה היא עולה.

נשלב גם את תחום ההגדרה של הפונקציה $0 \leq x$

$\Downarrow$

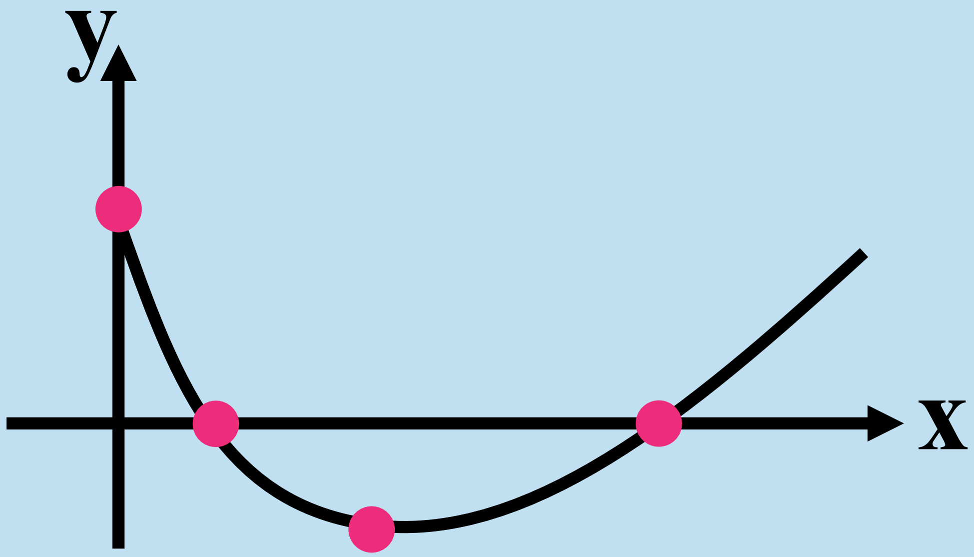
תחום ירידה: $0 < x < 4$

תחום עלייה: $4 < x$

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$$

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון



$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ו. הוכח את אי השוויון $x - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0$ לכל $x \geq 0$

פתרון

הפונקציה, בתחום ההגדרה שלה, חסומה מלמטה ע"י המינימום המוחלט

$$f(x) \geq -1$$

$$x - 4\sqrt{x} + 3 \geq -1$$

$$\boldsymbol{x - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0}$$

$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 3$ ו. הוכח את אי השוויון $x - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0$ לכל $x \geq 0$

פתרון

נבחן אלגברית את הביטוי באי השוויון:

$$x - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x} - 2)^2$$

ביטוי בעל מעריך זוגי, בהכרח יניב ערך אי שלילי לכל x מוגדר

$$(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$$

ז. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

פתרון

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

אסימפטוטה אנכית

הערך $x = 0$ מאפס את המכנה ולא את המונה: $\sqrt{0} - 2 = -2$

$$\Downarrow$$

הישר $x = 0$ אסימפטוטה אנכית לציר x של הפונקציה $f'(x)$

ז. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

פתרון

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$$

אסימפטוטה אופקית

גם במונה וגם במכנה אותה החזקה המובילה, $\sqrt{x}$,
אסימפטוטה אופקית תהיה מנת המקדמים $y=\frac{1}{1}$

$\Downarrow$

הישר $y=1$ אסימפטוטה אופקית לציר x של הפונקציה $f'(x)$

ח. שרטט עפ״י הגרף של הפונקציה $f(x)$ את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

פתרון

לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול

$\Downarrow$

לפונקציה $f'(x)$ אין נקודות קיצון פנימיות

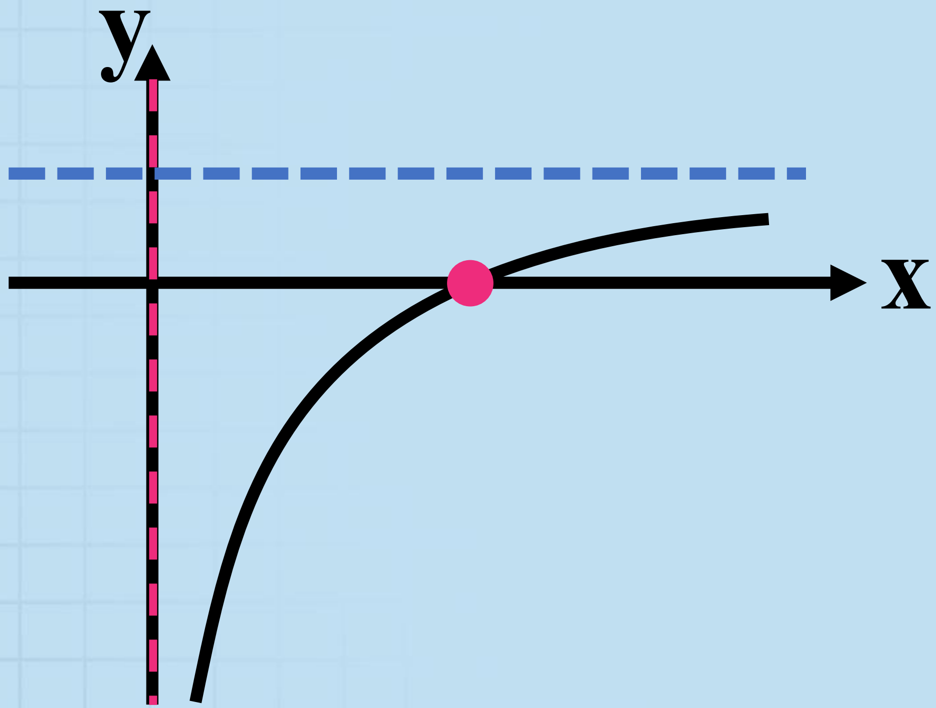
$(4,-1)$ נקודת מינימום עבור $f(x)$

$\Downarrow$

$$f'(4)=0$$

ח. שרטט עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$ את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

פתרון



תחום ירידה $f(x)$: $0 < x < 4$

תחום עלייה $f(x)$: $4 < x$

$\Downarrow$

$f'(x)$ שלילית: $0 < x < 4$

$f'(x)$ חיובית: $4 < x$

בהצלחה