פתרון תרגיל

נקודות קיצון מוחלטות – פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 154, ת. 6

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

6) א. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$.

ב. הוכח שלכל $x \geq 0$ מתקיים אי השוויון: $0 \leq \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3} \leq 1$.

ג. האם יש לפונקציה נקודת קיצון מקומית שאיננה נקודת קיצון מוחלטת?

א. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$.

פתרון

תחום הגדרה: $x \geq 0$

$x^2 + 3 \neq 0$

פסוק אמת

חיתוך בין התנאים: $x \geq 0$

א. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$.

פתרון

נדרוש: $y'(x) = 0$

$$y'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2+3) - \sqrt{x} \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{\frac{x^2+3-4x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+3}{2\sqrt{x}(x^2+3)^2} = 0$$

א. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$.

פתרון

$$-3x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\cancel{x = -1} \qquad x = 1$$

$$x \geq 0$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $y''(x)$

א. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$.

•

פתרון

$$x = 1$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $y''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ"י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(-3x^2 + 3)' = -6x$$

א. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$.

פתרון

$$(-3x^2 + 3)' = -6x$$

$x = 1$ $\quad\quad$ $-6 \cdot 1 < 0$

עבור $x = 1$ לפונקציה נקודת מקסימום

$$y(1) = \frac{\sqrt{1}}{1^2 + 3} = \frac{1}{4}$$

$\left(1, \frac{1}{4}\right)$ **נקודת מקסימום**

א. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$.

פתרון

נקודת קיצון קצה

$$x = 0$$

$$y(0) = 0$$

(0,0) נקודת מינימום, כי החל ממנה הפונקציה עולה אל נקודת המקסימום

המינימום המוחלט של הפונקציה $y = 0$

המקסימום המוחלט של הפונקציה $y = \frac{1}{4}$

ב. הוכח שלכל $x \geq 0$ מתקיים אי השוויון: $0 \leq \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3} \leq 1$.

פתרון

הפונקציה, בתחום ההגדרה שלה, חסומה בין ערכי המינימום והמקסימום המוחלטים.

עפ"י סעיף א':

$$0 \leq y(x) \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2+3} \leq \frac{1}{4}$$

ב. הוכח שלכל $x \geq 0$ מתקיים אי השוויון : $0 \leq \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3} \leq 1$.

פתרון

$$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2+3} \leq \frac{1}{4}$$

נכפול את אגפי אי השוויון ב- 4

$$\mathbf{0 \leq \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3} \leq 1}$$

ג. האם יש לפונקציה נקודת קיצון מקומית שאיננה נקודת קיצון מוחלטת?

פתרון

לפונקציה נקודת קיצון מקומית אחת - $\left(1,\frac{1}{4}\right)$ נקודת מקסימום

עפ"י ההוכחה בסעיף א', היא גם נקודת קיצון מוחלטת

לפונקציה אין נקודת קיצון מקומית שאיננה נקודת קיצון מוחלטת

בהצלחה