פתרון תרגיל

חקירת פונקציה – פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 149, ת. 22

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

22) נתון שברביע הראשון הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+b}{\sqrt{x^2-1}}$ עולה בתחום $x > \sqrt{2}$ ויורדת בתחום $1 < x < \sqrt{2}$.

א. מצא את הפונקציה.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x.

נתון שברביע הראשון הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+b}{\sqrt{x^2-1}}$ עולה בתחום $x > \sqrt{2}$ ויורדת בתחום $1 < x < \sqrt{2}$.

א. מצא את הפונקציה.

פתרון

עבור $x = \sqrt{2}$, הפונקציה משנה תחום מירידה לעלייה.

אם הפונקציה מוגדרת בנקודה, זו נקודת מינימום

הפונקציה מוגדרת בנקודה $x = \sqrt{2}$

$$f'(\sqrt{2}) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x^2-1} - (x^2+b) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

נתון שברביע הראשון הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+b}{\sqrt{x^2-1}}$ עולה בתחום $x>\sqrt{2}$ ויורדת בתחום $1<x<\sqrt{2}$.

א. מצא את הפונקציה.

פתרון

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\sqrt{x^2-1}-(x^2+b)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{2x(x^2-1)-x(x^2+b)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{2x^3-2x-x^3-bx}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}$$

נתון שברביע הראשון הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+b}{\sqrt{x^2-1}}$ עולה בתחום $x>\sqrt{2}$ ויורדת בתחום $1<x<\sqrt{2}$.

א. מצא את הפונקציה.

פתרון

$$f'(x)=\frac{x^3-(2+b)x}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}$$

$$f'(\sqrt{2})=\frac{(\sqrt{2})^3-(2+b)(\sqrt{2})}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}\left((\sqrt{2})^2-1\right)}=0$$

נתון שברביע הראשון הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+b}{\sqrt{x^2-1}}$ עולה בתחום $x>\sqrt{2}$ ויורדת בתחום $1<x<\sqrt{2}$.

א. מצא את הפונקציה.

פתרון

$$2\sqrt{2}-\sqrt{2}(2+b)=0 \qquad /\div\sqrt{2}\neq 0$$

$$2-2-b=0$$

$$\boldsymbol{b=0}$$

הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}$ ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

תחום הגדרה: $x^2 - 1 \geq 0$ $\sqrt{x^2 - 1} \neq 0$

$x^2 - 1 \neq 0$

חיתוך בין התנאים: $x^2 - 1 > 0$

הביטוי מתאר פרבולה ישרה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = \pm 1$

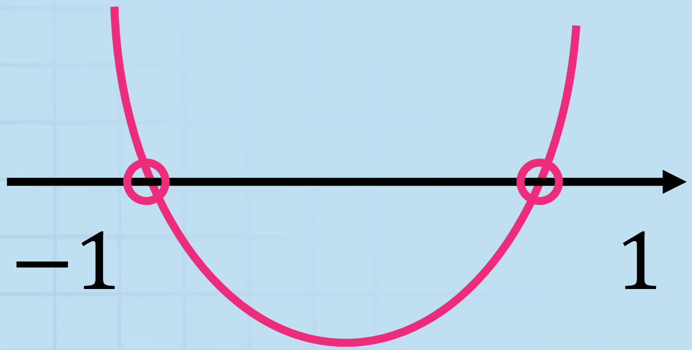
$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}$$

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

חיתוך בין התנאים: $x^2-1>0$

הביטוי מתאר פרבולה ישרה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x=\pm1$



תחום ההגדרה: $1<x$ או $x<-1$

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}$$

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

נדרוש: $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{x^3-(2+b)x}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}=\frac{x^3-2x}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}$$

$$=\frac{x(x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)}=0$$

$\cancel{x=0}$ $\quad x=-\sqrt{2} \quad x=\sqrt{2}$

$x<-1$ או $1<x$

$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

עפ"י הנתון, עבור $x = \sqrt{2}$, הפונקציה משנה תחום מירידה לעלייה,
ולכן מדובר בנקודת מינימום

$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{(\sqrt{2}) - 1}} = 2$$

$(\sqrt{2},2)$ נקודת מינימום

$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}}$ ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

$$x = -\sqrt{2}$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ״י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הנגזרת של המונה:

$$(x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$$

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה. $\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}$

פתרון

$$(x^3-2x)' = 3x^2-2$$

$x = -\sqrt{2}$ $\qquad 3\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 2 > 0$

עבור $x = -\sqrt{2}$ לפונקציה נקודת מינימום

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{\left(-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)-1}} = 2$$

$\left(-\sqrt{2},2\right)$ נקודת מינימום

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

הפונקציה מוגדרת בתחום פתוח $1 < x$ או $x < -1$

ולכן אין נקודות קיצון קצה

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

עד נקודת המינימום, $x=\sqrt{2}$, הפונקציה יורדת ולאחריה היא עולה.

עד נקודת המינימום, $x=-\sqrt{2}$, הפונקציה יורדת ולאחריה היא עולה.

נשלב גם את תחום ההגדרה של הפונקציה $1<x$ או $x<-1$

$$\Downarrow$$

תחום עלייה: $\sqrt{2}<x$ **או** $-\sqrt{2}<x<-1$

תחום ירידה: $1<x<\sqrt{2}$ **או** $x<-\sqrt{2}$

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

פתרון

אסימפטוטה אנכית

הערכים $x = \pm 1$ מאפסים את המכנה ולא את המונה: $(\pm 1)^2 = 1$

$$\Downarrow$$

הישרים $x = \pm 1$ אסימפטוטות אנכיות לציר x של הפונקציה

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

פתרון

אסימפטוטה אופקית

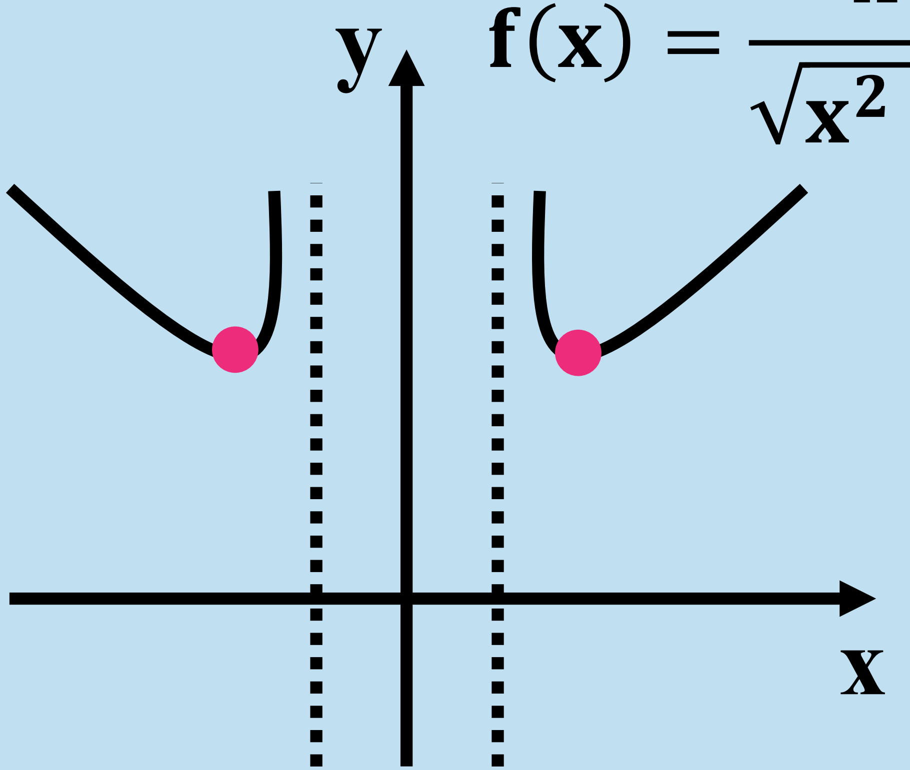
החזקה המובילה, x^2 , במונה ולכן **אין** לפונקציה אסימפטוטה אופקית

$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$



$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}$ ז. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-x.

פתרון

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$f'(x) = \frac{x(x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}(x^2-1)} = 0$$

עפ"י סעיף ג': $x = \sqrt{2}$ $x = -\sqrt{2}$ $\cancel{x = 0}$

$1 < x$ או
$x < -1$

$(\pm\sqrt{2}, 0)$

בהצלחה