פתרון תרגיל

חקירת פונקציה –
פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 147, ת. 16

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

חקור את הפונקציות הבאות בהתאם לסעיפים הבאים ומצא:

א) תחום הגדרה.

ב) נקודות קיצון (כולל בקצוות).

ג) תחומי עלייה וירידה.

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

ו) שרטט את גרף הפונקציה.

16) $$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$$

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ **א)** תחום הגדרה.

פתרון

תחום הגדרה: $x^2 - 4x \geq 0$

$\sqrt{x^2 - 4x} \neq 0$

$x^2 - 4x \neq 0$

חיתוך בין התנאים: $x^2 - 4x > 0$

הביטוי מתאר פרבולה ישרה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = 0,4$

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ **א)** תחום הגדרה.

פתרון

חיתוך בין התנאים: $x^2 - 4x > 0$

הביטוי מתאר פרבולה ישרה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = 0,4$

תחום ההגדרה: $x < 0$ **או** $4 < x$

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ ב) נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

נדרוש: $y'(x) = 0$

$$y'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x^2-4x} - x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-4x}} \cdot (2x-4)}{\left(\sqrt{x^2-4x}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2x(x^2-4x) - x^2(x-2)}{\sqrt{x^2-4x}}}{x^2-4x} = \frac{2x^3 - 8x^2 - x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^2-4x}(x^2-4x)}$$

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ ב) נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$$y'(x) = \frac{2x^3 - 8x^2 - x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^2-4x}\,(x^2-4x)} = \frac{x^3 - 6x^2}{\sqrt{x^2-4x}\,(x^2-4x)}$$

$$= \frac{x^2(x-6)}{\sqrt{x^2-4x}\,(x^2-4x)} = 0$$

$x = 6$ $\quad$ $\cancel{x = 0}$

$x < 0$ או $4 < x$

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ ב) נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$x = 6$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $y''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי (עפ״י תחום ההגדרה), ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הנגזרת של המונה:

$$(x^3 - 6x^2)' = 3x^2 - 12x$$

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

$$(x^3-6x^2)' = 3x^2-12x$$

$x = 6$ $\qquad 3\cdot 6^2 - 12\cdot 6 > 0$

עבור $x = 6$ לפונקציה נקודת מינימום

$$y(6) = \frac{6^2}{\sqrt{6^2-4\cdot 6}} = 6\sqrt{3}$$

$\left(6,6\sqrt{3}\right)$ נקודת מינימום

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ **ב)** נקודות קיצון (כולל בקצוות).

פתרון

הפונקציה מוגדרת בתחום פתוח $x > 4$ או $x < 0$

ולכן אין נקודות קיצון קצה

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

תחומי עלייה וירידה ייקבעו עפ"י סימן הנגזרת הראשונה

$$y'(x) = \frac{x^2(x-6)}{\sqrt{x^2-4x}(x^2-4x)}$$

המכנה חיובי לכל x מוגדר.
סימן הנגזרת יקבע עפ"י המונה, אשר מתאפס עבור $x = 0{,}6$
נציב ערכים מייצגים בתחומים השונים, תוך התחשבות בתחום
ההגדרה של הפונקציה

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ ג) תחומי עלייה וירידה.

פתרון

$$y'(x) = \frac{x^2(x-6)}{\sqrt{x^2-4x}\,(x^2-4x)}$$

$6 < x$	$4 < x < 6$	$x < 0$
$y'(7) > 0$	$y'(5) < 0$	$y'(-1) < 0$

תחום עלייה: $6 < x$ תחום ירידה: $4 < x < 6$ או $x < 0$

16) $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

פתרון

חיתוך עם ציר y , נדרוש $x=0$:

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$, אין חיתוך עם ציר y

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y=0$:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}=0$$

$$x=0$$

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$, אין חיתוך עם ציר x

$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ (16 ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

פתרון

אסימפטוטה אנכית

הערך $x = 4$ מאפס את המכנה ולא את המונה: $4^2 = 16$

$\Downarrow$

הישר $x = 4$ אסימפטוטה אנכית לציר x של הפונקציה

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

פתרון

אסימפטוטה אנכית

הערך $x = 0$ מאפס גם את המכנה וגם את המונה

נחלק גם את המונה וגם את המכנה בחזקה המובילה, x^2

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^2}} \right) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^4} - \frac{4x}{x^4}}} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ **ה)** אסימפטוטות המאונכות לצירים.

פתרון

אסימפטוטה אנכית

עבור $x = 0$ לפונקציה נקודת אי הגדרה, "חור": $(0,0)$

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ **ה)** אסימפטוטות המאונכות לצירים.

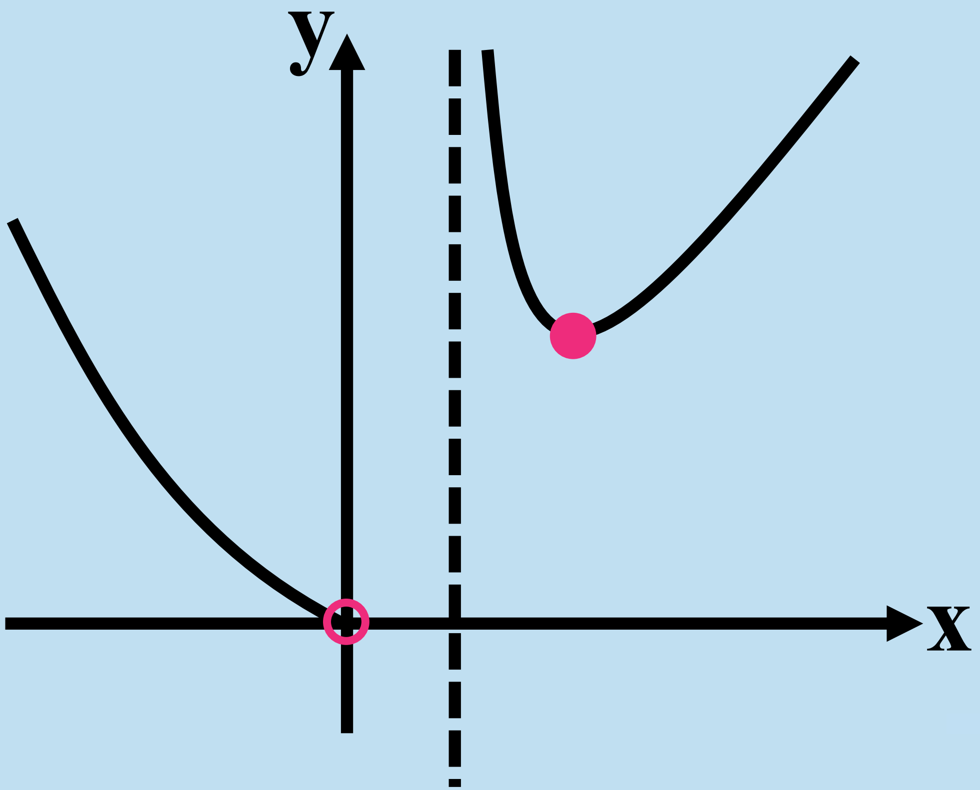
פתרון

אסימפטוטה אופקית

החזקה המובילה, x^2 , במונה ולכן **אין** לפונקציה אסימפטוטה אופקית

16) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$ ו) שרטט את גרף הפונקציה.

פתרון



בהצלחה