פתרון תרגיל

חקירת פונקציה –
פונקציות עם שורשים

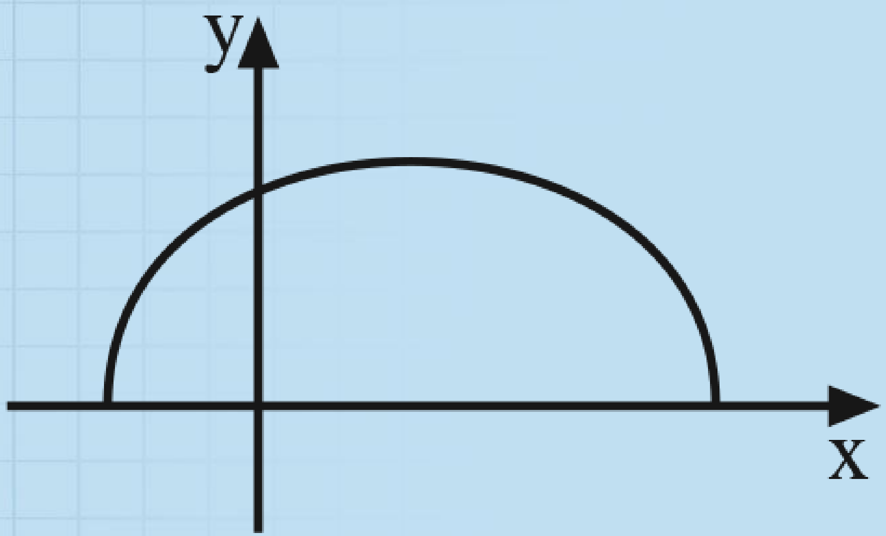
מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 146, ת. 3

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

3) בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$.



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:

(1) בנקודה אחת.

(2) בשתי נקודות.

(3) באף נקודה.

ו. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת $\mathbf{g(x) = \frac{1}{f(x)}}$. מצא עפ״י התשובה של סעיף ד׳ את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

ז. מצא עפ״י התשובה של סעיף ב׳ את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

ח. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

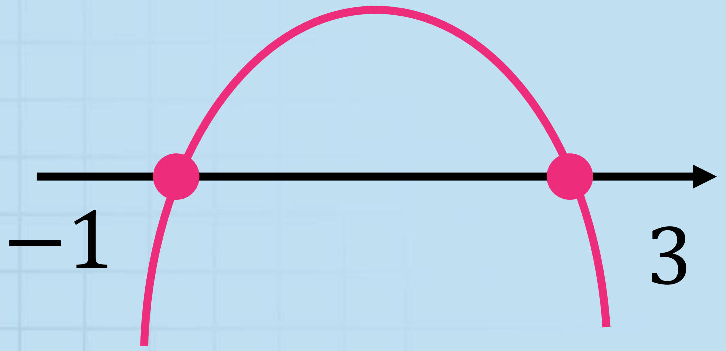
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה. $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$

פתרון

תחום הגדרה: $-x^2+2x+3\geq 0$

הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x=3,-1$

תחום ההגדרה: $\boldsymbol{-1\leq x\leq 3}$



$f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$ ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

נדרוש: $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}}=\frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}=0$$

$$x=1$$

$$f(1)=\sqrt{-1^2+2\cdot 1+3}=2$$

עפ"י הסרטוט, הנקודה $(1,2)$ נקודת מקסימום פנימית

$f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$ ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

נמצא את נקודות קצה התחום הסגור:

$x=-1$ $f(-1)=\sqrt{-(-1)^2+2\cdot(-1)+3}=0$

עפ"י הסרטוט, הנקודה $(-1,0)$ נקודת מינימום קצה

$f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$ ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

פתרון

נמצא את נקודות קצה התחום הסגור:

$x = 3$ $\quad$ $f(3) = \sqrt{-3^2 + 2 \cdot 3 + 3} = 0$

עפ"י הסרטוט, הנקודה $(3,0)$ נקודת מינימום קצה

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$

פתרון

עד נקודת המקסימום, $x = 1$, הפונקציה עולה ולאחריה היא יורדת.

נשלב גם את תחום ההגדרה של הפונקציה $-1 \le x \le 3$

$$\Downarrow$$

תחום עלייה: $-1 < x < 1$

תחום ירידה: $1 < x < 3$

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים. $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$

פתרון

חיתוך עם ציר y , נדרוש $x = 0$:

$$f(0) = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$$

$\left(0, \sqrt{3}\right)$

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$\sqrt{-x^2+2x+3} = 0$$

$(-1, 0)$

$$x = -1 \qquad x = 3$$

$(3, 0)$

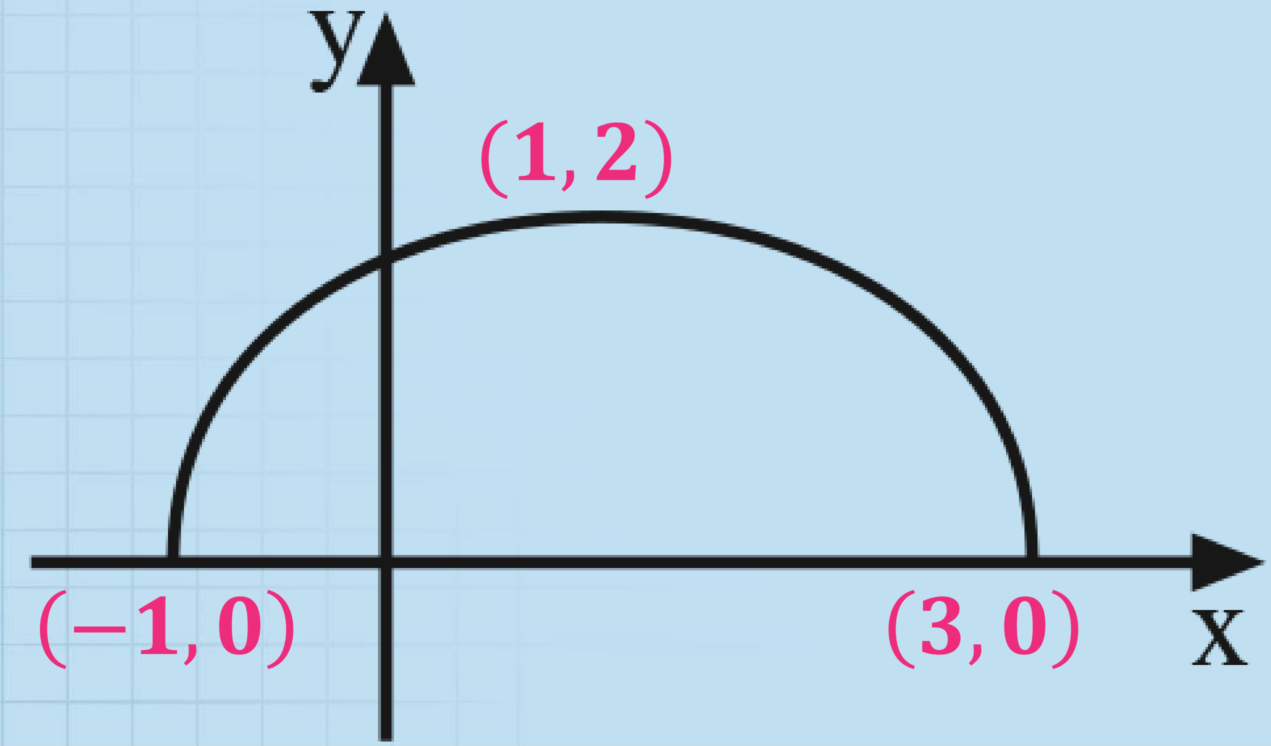
ה. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$$

(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון

נפתור את השאלה גרפית,
עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$



חיתוך בנקודה אחת יתקבל רק
בשיעור ה- y של נקודות הקיצון

(1) הישר $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת עבור $k = 2$

ה. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:

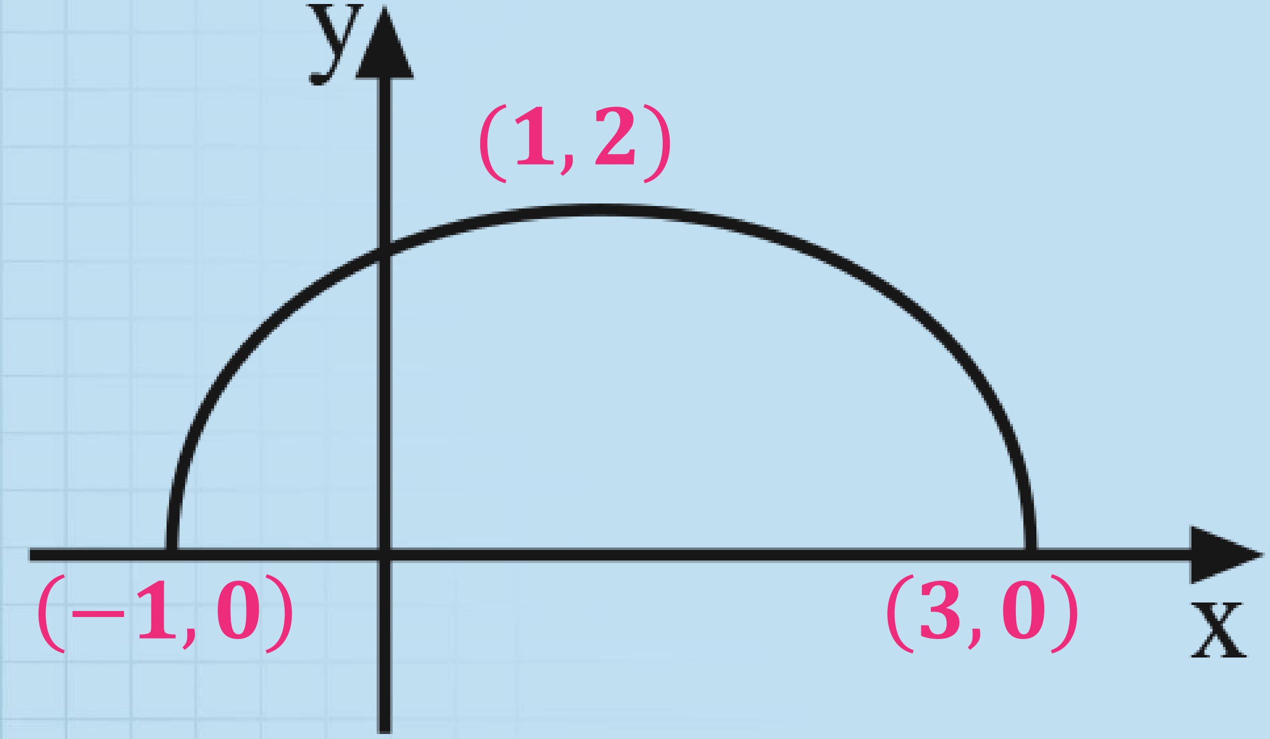
$f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$

(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון

נפתור את השאלה גרפית,

עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$



(2) הישר $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות עבור

$$0 \le k < 2$$

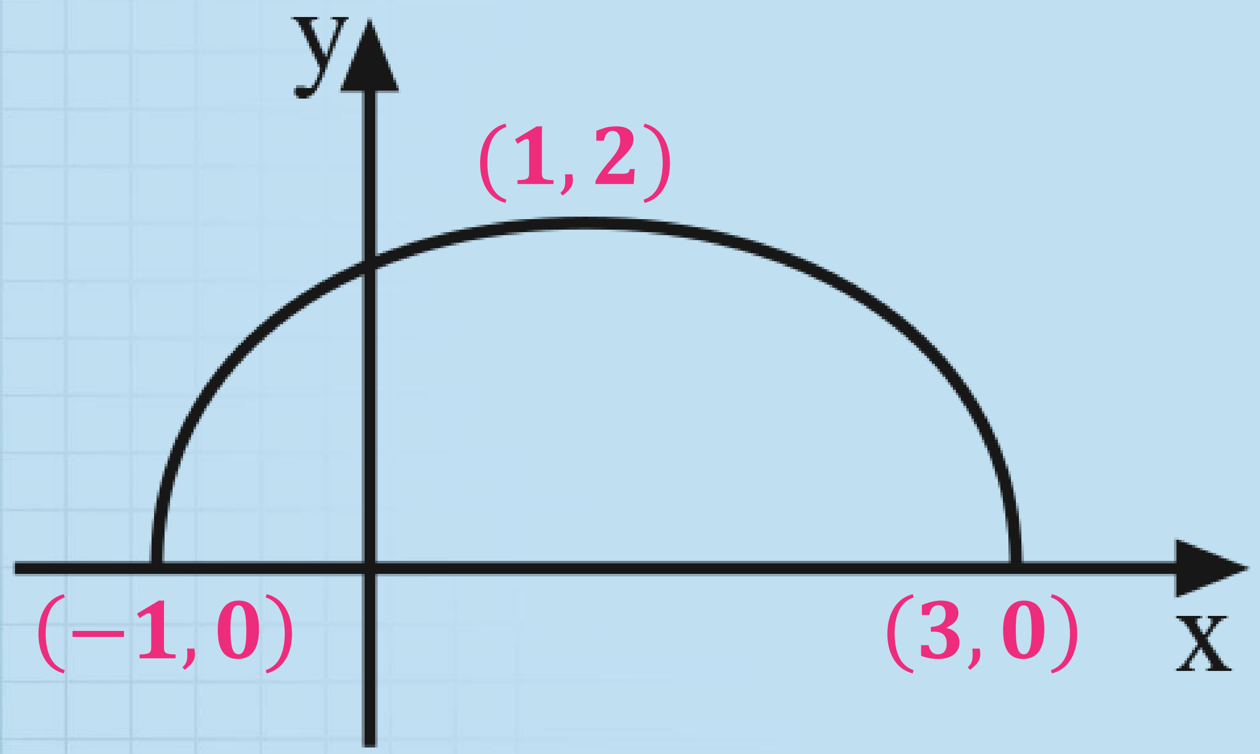
ה. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$$

(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון

נפתור את השאלה גרפית,
עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$



(3) הישר $y = k$ לא יחתוך את גרף הפונקציה עבור
$k < 0$ או $2 < k$

ו. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. מצא עפ״י התשובה של סעיף ד׳ את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

פתרון

אסימפטוטה אנכית תתקבל עבור ערכי x שמאפסים את המכנה ולא את המונה.

המונה של הפונקציה $g(x)$ שונה מאפס לכל x,
ולכן אסימפטוטה אנכית תתקבל עבור ערכי x שמאפסים את הפונקציה $f(x)$

$$f(x)=0$$

עפ״י סעיף ד׳: $x=3$ $\quad$ $x=-1$

הישרים $x=-1$ ו- $x=3$ הם אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה $g(x)$

ז. מצא עפ״י התשובה של סעיף ב׳ את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

נדרוש: $g'(x) = 0$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 0$$

$$f'(x) = 0$$

עפ״י סעיף ב׳: $x = 1$

נאבחן את הנקודה החשודה עפ״י תחומי עלייה וירידה

ז. מצא עפ"י התשובה של סעיף ב' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

המכנה של הנגזרת חיובי לכל x מוגדר.

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

סימן הנגזרת יקבע ע"י המונה $-f'(x)$

כלומר, תחומי החיוביות והשליליות של הנגזרת $g'(x)$

יהיו **הפוכים** לתחומי החיוביות והשליליות של הנגזרת $f'(x)$

תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$

יהיו **הפוכים** לתחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$

ז. מצא עפ"י התשובה של סעיף ב' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

$g(x)$ **יורדת בתחום:** $-1 < x < 1$

$g(x)$ **עולה בתחום:** $1 < x < 3$

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

עבור $x = 1$ לפונקציה $g(x)$ נקודת מינימום

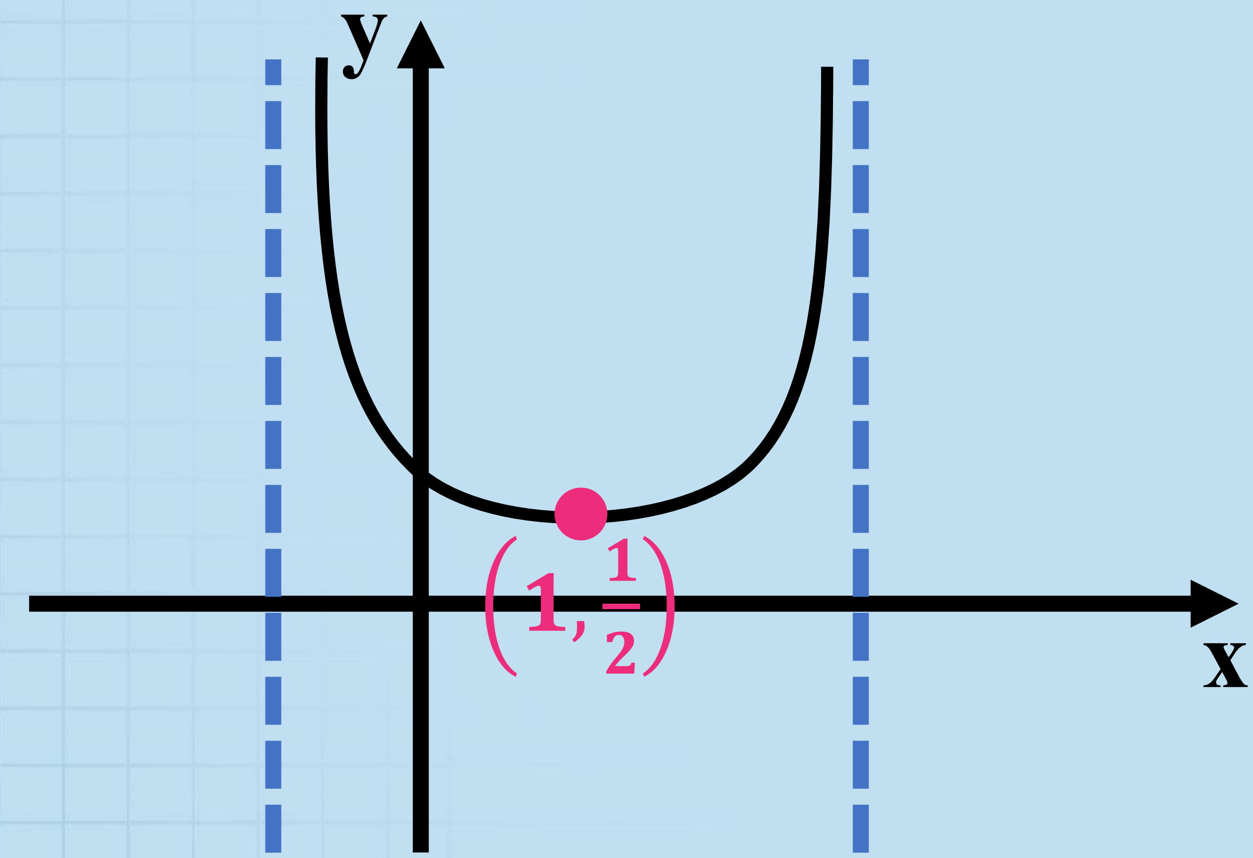
$$g(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2}$$

$\left(1, \frac{1}{2}\right)$ נקודת מינימום

ח. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון

$$\frac{1}{f(x)}$$



בהצלחה