פתרון תרגיל

עלייה וירידה – פונקציות עם שורשים

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 136, ת. 16

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

16) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

א. הראה שהפונקציה יורדת בתחום $0 < x < 4$.

ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $\mathbf{g'(x) = f(x)}$.

(1) מצא את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(3) ישר ששיפועו $-\frac{1}{4}$ **משיק** לגרף הפונקציה $g(x)$. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. א. הראה שהפונקציה יורדת בתחום $0 < x < 4$.

פתרון

תחום הגדרה: $x \geq 0$ $x \neq 0$

חיתוך בין התנאים: $x > 0$

נדרוש: $f'(x) = 0$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. א. הראה שהפונקציה יורדת בתחום $0 < x < 4$.

פתרון

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \left(-\frac{1}{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$2x\sqrt{x} = x^2 \qquad /\div x\sqrt{x} \neq 0$$

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. א. הראה שהפונקציה יורדת בתחום $0<x<4$.

פתרון

$$2=\sqrt{x}$$

$$x=4$$

$$f'(3)=-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2\cdot 3\sqrt{3}}<0$$

הנגזרת הראשונה שלילית בתחום $0<x<4$
ומכאן שהפונקציה יורדת בתחום זה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

פתרון

נדרוש: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = x \qquad / \div \sqrt{x} \neq 0$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

פתרון

$$1 = \sqrt{x}$$

$$1 = x$$

הפונקציה מוגדרת לכל $\mathbf{0} > x$. **נציב ערכים מייצגים:**

$$f(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} > 0$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

פתרון

הפונקציה $f(x)$ חיובית עבור $0 < x < 1$

הפונקציה $f(x)$ שלילית עבור $1 < x$

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

נדרוש: $g'(x) = 0$

$$g'(x) = f(x) = 0$$

עפ"י סעיף ב':

$$x = 1$$

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $g''(x)$

$$g''(x) = f'(x)$$

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$.

(1) מצא את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

פתרון

נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $g''(x)$

$$g''(1) = f'(1) = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2 \cdot 1\sqrt{1}} < 0$$

עבור $x = 1$ לפונקציה $g(x)$ נקודת מקסימום

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

תחומי עליה וירידה יקבעו עפ"י סימן הנגזרת הראשונה

עפ"י סעיף ב', הפונקציה $f(x)$ חיובית עבור $0 < x < 1$

ושלילית עבור $1 < x$

הפונקציה $g(x)$ עולה בתחום $0 < x < 1$ ויורדת בתחום $1 < x$

(3) ישר ששיפועו $-\frac{1}{4}$ **משיק** לגרף הפונקציה $g(x)$. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

פתרון

עבור שיעור ה- x של נקודת ההשקה מתקיים:

$$g'(x) = -\frac{1}{4}$$

נדרוש:

$$g'(x) = f(x) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{4}$$

(3) ישר ששיפועו $-\frac{1}{4}$ **משיק** לגרף הפונקציה $g(x)$. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

פתרון

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{4} \qquad /\cdot 4x$$

$$4 - 4\sqrt{x} = -x$$

$$x - 4\sqrt{x} + 4 = 0$$

(3) ישר ששיפועו $-\frac{1}{4}$ **משיק** לגרף הפונקציה $g(x)$. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.

פתרון

$$x - 4\sqrt{x} + 4 = 0$$

$$(\sqrt{x} - 2)^2 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$

בהצלחה