פתרון תרגיל

נקודות קיצון פנימיות – מציאת פרמטרים (פונקציות עם שורשים)

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 133, ת. 18

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

18) לפונקציה $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x = \sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

ב. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = f(-x)$. היעזר בתשובה לסעיף א' ומצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$.

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

$$f'(\sqrt{3})=0$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\cdot 2x\cdot(x^2-1)-\sqrt{x^2+a}\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{\frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x^2+a}}-2x\sqrt{x^2+a}}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac{x(x^2-1)-2x(x^2+a)}{\sqrt{x^2+a}}}{(x^2-1)^2}$$

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

$$f'(x)=\frac{x(x^2-1)-2x(x^2+a)}{\sqrt{x^2+a}(x^2-1)^2}=\frac{x^3-x-2x^3-2ax}{\sqrt{x^2+a}(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{-x^3-(1+2a)x}{\sqrt{x^2+a}(x^2-1)^2}$$

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

$$f'(x)=\frac{-x^3-(1+2a)x}{\sqrt{x^2+a}(x^2-1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(\sqrt{3})=\frac{-(\sqrt{3})^3-(1+2a)\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+a}\left((\sqrt{3})^2-1\right)^2}=0$$

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

$$-3\sqrt{3}-(1+2a)\sqrt{3}=0 \qquad /\div\sqrt{3}$$

$$-3-1-2a=0$$

$$-2a=4$$

$$\boldsymbol{a=-2}$$

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}}{x^2-1}$$

תחום הגדרה:

$$x^2-2\geq 0$$

$$x^2-1\neq 0$$

$$x\neq \pm 1$$

הביטוי מתאר פרבולה ישרה

החותכת את ציר ה- x בנקודות $x=\pm\sqrt{2}$

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

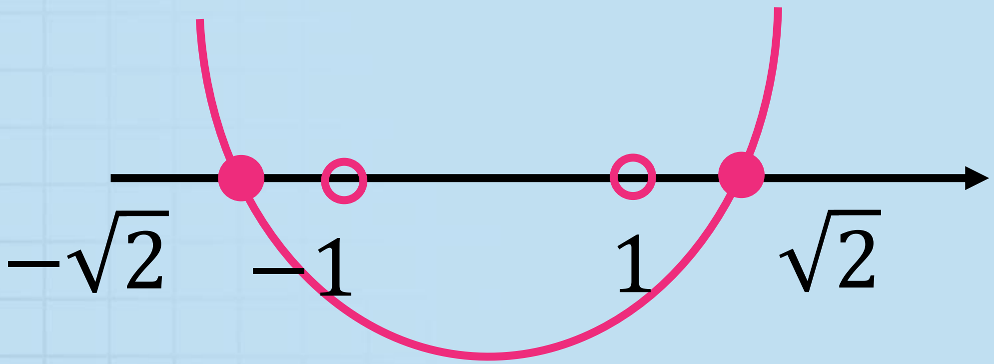
א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

תחום הגדרה:

$$x^2-2\geq 0$$

נתייחס לדרישה $x\neq \pm 1$



$\boldsymbol{\sqrt{2}\leq x}$, $\boldsymbol{x\leq -\sqrt{2}}$

נדרוש: $f'(x)=0$

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

$$f'(x)=\frac{-x^3-(1+2a)x}{\sqrt{x^2+a}(x^2-1)^2}=\frac{-x^3+3x}{\sqrt{x^2-2}(x^2-1)^2}=0$$

$$x(-x^2+3)=0$$

$$\cancel{x=0} \qquad x=\pm\sqrt{3}$$

$$x\le-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\le x$$

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי, ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הנגזרת של המונה:

$$(-x^3+3x)'=-3x^2+3$$

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

$$(-x^3+3x)'=-3x^2+3$$

עבור $x=\sqrt{3}$ נקודת מקסימום

$$-3\cdot 3+3<0 \qquad x=\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3-2}}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ נקודת מקסימום

לפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x^2-1}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $x=\sqrt{3}$.

א. מצא את a ואת נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה.

פתרון

$$(-x^3+3x)'=-3x^2+3$$

עבור $x=-\sqrt{3}$ נקודת מקסימום $\quad -3\cdot 3+3<0 \quad x=-\sqrt{3}$

$$f(-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3-2}}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ נקודת מקסימום

ב. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = f(-x)$. היעזר בתשובה לסעיף א' ומצא את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

$$g(x) = f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2-2}}{(-x)^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^2-1} = f(x)$$

הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית המקיימת $f(x) = f(-x)$
ולכן לשתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$, אותן נקודות קיצון

$\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ **נקודת מקסימום**

$\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ **נקודת מקסימום**

בהצלחה