# פתרון תרגיל

## נקודות קיצון מוחלטות –
## פונקציות רציונאליות

### מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

**581 , עמ' 102, ת. 6**

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

# השאלה

6) לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.

א. מצא את $a$.

ב. מצא בתחום $1 \le x \le 4$ את המינימום של הפונקציה.

ג. הוכח שבתחום $-10 \le x \le -1$ הפונקציה היא אי שלילית.

לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$. א. מצא את $a$.

# פתרון

**תחום הגדרה:** $x \neq 8$ $x \neq 0$

לפונקציה ערך קיצון עבור $x = -4$ : $f'(-4) = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \left(-\frac{a}{(x-8)^2} \cdot 1\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{a}{(x-8)^2}$$

$$f'(-4) = -\frac{1}{(-4)^2} + \frac{a}{(-4-8)^2} = -\frac{1}{16} + \frac{a}{144} = 0$$

לפונקציה $y = \frac{1}{x} - \frac{a}{x-8}$ יש ערך קיצון בנקודה $x = -4$.   א. מצא את a.

# פתרון

$$-\frac{1}{16} + \frac{a}{144} = 0$$

$$\frac{a}{144} = \frac{1}{16}$$

$$a = 9$$

$y = \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8}$ ב. מצא בתחום $1 \le x \le 4$ את המינימום של הפונקציה.

# פתרון

**נדרוש $f'(x) = 0$:**

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{a}{(x-8)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(x-8)^2} = \frac{-(x-8)^2 + 9x^2}{x^2(x-8)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 16x - 64 + 9x^2}{x^2(x-8)^2} = \frac{8x^2 + 16x - 64}{x^2(x-8)^2} = 0$$

$y = \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8}$ ב. מצא בתחום $1 \le x \le 4$ את המינימום של הפונקציה.

# פתרון

**נדרוש $f'(x) = 0$:**

$$f'(x) = \frac{8x^2 + 16x - 64}{x^2(x-8)^2} = 0$$

$$8x^2 + 16x - 64 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$y = \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8}$ ב. מצא בתחום $1 \le x \le 4$ את המינימום של הפונקציה.

# פתרון

**נדרוש $f'(x) = 0$:**

$$(x-2)(x+4) = 0$$

$$x = 2 \qquad \cancel{x = -4}$$

$$1 \le x \le 4$$

**נאבחן את הנקודה החשודה באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$**

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי, ולכן
סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הנגזרת של המונה:

$y = \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8}$ ב. מצא בתחום $1 \le x \le 4$ את המינימום של הפונקציה.

# פתרון

$$(8x^2 + 16x - 64)' = 16x + 16$$

$x = 2$ $\quad 2 \cdot 16 + 16 > 0$ $\quad$ **עבור $x = 2$ נקודת מינימום**

$$f(2) = \frac{1}{2} - \frac{9}{2-8} = 2$$

**$(2,2)$ נקודת מינימום**

$y = \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8}$ ב. מצא בתחום $1 \le x \le 4$ את המינימום של הפונקציה.

# פתרון

**נבדוק את ערכי הפונקציה בקצות התחום:**

$$f(1) = \frac{1}{1} - \frac{9}{1-8} = \frac{16}{7} = 2.286$$ $\left(1, \frac{16}{7}\right)$

$$f(4) = \frac{1}{4} - \frac{9}{4-8} = 2.5$$ $(4, 2.5)$

$\Downarrow$

**המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום:** $y = 2$

$y = \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8}$ ג. הוכח שבתחום $-10 \le x \le -1$ הפונקציה היא אי שלילית.

# פתרון

**נמצא את ערכי המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום:**

**נדרוש** $f'(x) = 0$**:** $x = -4$ $\cancel{x = 2}$

$$-10 \le x \le -1$$

$16 \cdot (-4) + 16 < 0$ $x = -4$

**עבור** $x = -4$ **נקודת מקסימום**

$y = \frac{1}{x} - \frac{9}{x-8}$ ג. הוכח שבתחום $-10 \le x \le -1$ הפונקציה היא אי שלילית.

# פתרון

נבדוק את ערכי הפונקציה בקצות התחום:

$$f(-10) = \frac{1}{-10} - \frac{9}{-10-8} = 0.4$$

$(-10, 0.4)$

$$f(-1) = \frac{1}{-1} - \frac{9}{-1-8} = 0$$

$(-1, 0)$

$\Downarrow$

**המינימום המוחלט של הפונקציה בתחום: $y = 0$**

**ומכיוון שהפונקציה מוגדרת לכל $x$ בתחום, היא אי שלילית לכל $x$ בתחום**

# בהצלחה