פתרון תרגיל

חקירת פונקציה – פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 91, ת. 55

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

55) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$. היעזר ב- a במידת הצורך וענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ד. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f'(x)$ שלילית.

ח. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה- y.

ט. שרטט בצורה כללית, בהסתמך על הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

י. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

פתרון

תחום הגדרה: $x^2 - a^2 \neq 0$

$\boldsymbol{x \neq \pm a}$

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a>0$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

פתרון

חיתוך עם ציר y, נדרוש $x=0$:

$$f(0)=0$$

$(0,0)$

חיתוך עם ציר x, נדרוש $y=0$:

$$\frac{x}{(x^2-a^2)^2}=0$$

$$x=0$$

$(0,0)$

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a>0$.

ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

פתרון

אסימפטוטה המאונכת לציר x

הערך $x=a$ מאפס את המכנה ולא את המונה: a

הערך $x=-a$ מאפס את המכנה ולא את המונה: $-a$

$$\Downarrow$$

הישרים $x=\pm a$ הם אסימפטוטות מאונכות לציר x של הפונקציה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$.

ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

פתרון

אסימפטוטה המקבילה לציר x

החזקה המובילה, x^4, במכנה

$\Downarrow$

הישר $y = 0$ אסימפטוטה המקבילה לציר x של הפונקציה

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a>0$.

ד. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.

פתרון

על מנת להוכיח שלפונקציה אין נקודות קיצון,
נראה כי אין ערכי x שמאפסים את הנגזרת הראשונה

$$f'(x)=\frac{1(x^2-a^2)^2-x\cdot 2(x^2-a^2)\cdot 2x}{(x^2-a^2)^4}$$

$$=\frac{(x^2-a^2)[(x^2-a^2)-4x^2]}{(x^2-a^2)^4}=\frac{(x^2-a^2)(-3x^2-a^2)}{(x^2-a^2)^4}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$.

ד. הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.

פתרון

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - a^2)(3x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^4}$$

עפ"י תחום ההגדרה של הפונקציה $(x^2 - a^2) \neq 0$
בתחום הגדרה זה, הביטוי $(3x^2 + a^2)$ חיובי לכל a ולכל x

אין ערכי x שמאפסים את הנגזרת הראשונה

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

תחומי עלייה וירידה יקבעו עפ״י סימן הנגזרת הראשונה

$$f'(x) = \frac{-(x^2-a^2)(3x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^4}$$

המכנה חיובי לכל x מוגדר והביטוי $(3x^2+a^2)$ חיובי לכל a ולכל x מוגדר

סימן הנגזרת הראשונה יקבע עפ״י הביטוי $\boldsymbol{-(x^2-a^2)}$

הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = \pm a$

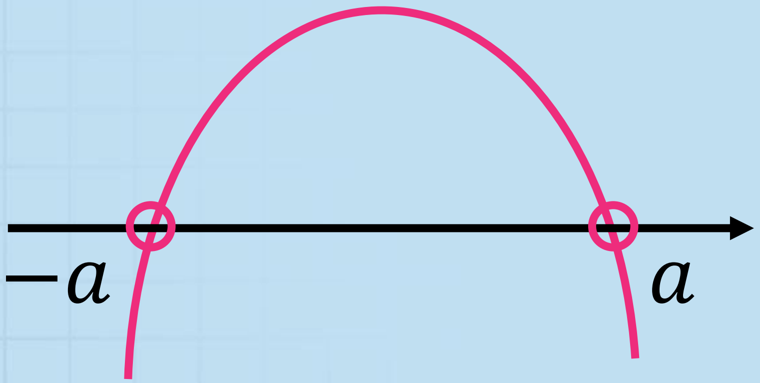
נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a>0$.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x=\pm a$

נתייחס ל**תחום ההגדרה** של הפונקציה $x\neq\pm a$



הנגזרת הראשונה $f'(x)$

חיובית בתחום $-a<x<a$

ושלילית בתחום $a<x$ או $x<-a$

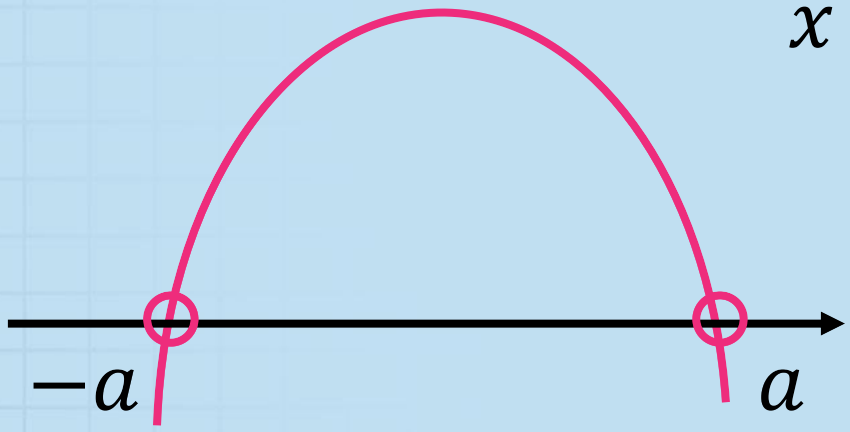
נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$.

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

פתרון

הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = \pm a$

נתייחס ל**תחום ההגדרה** של הפונקציה $x \neq \pm a$

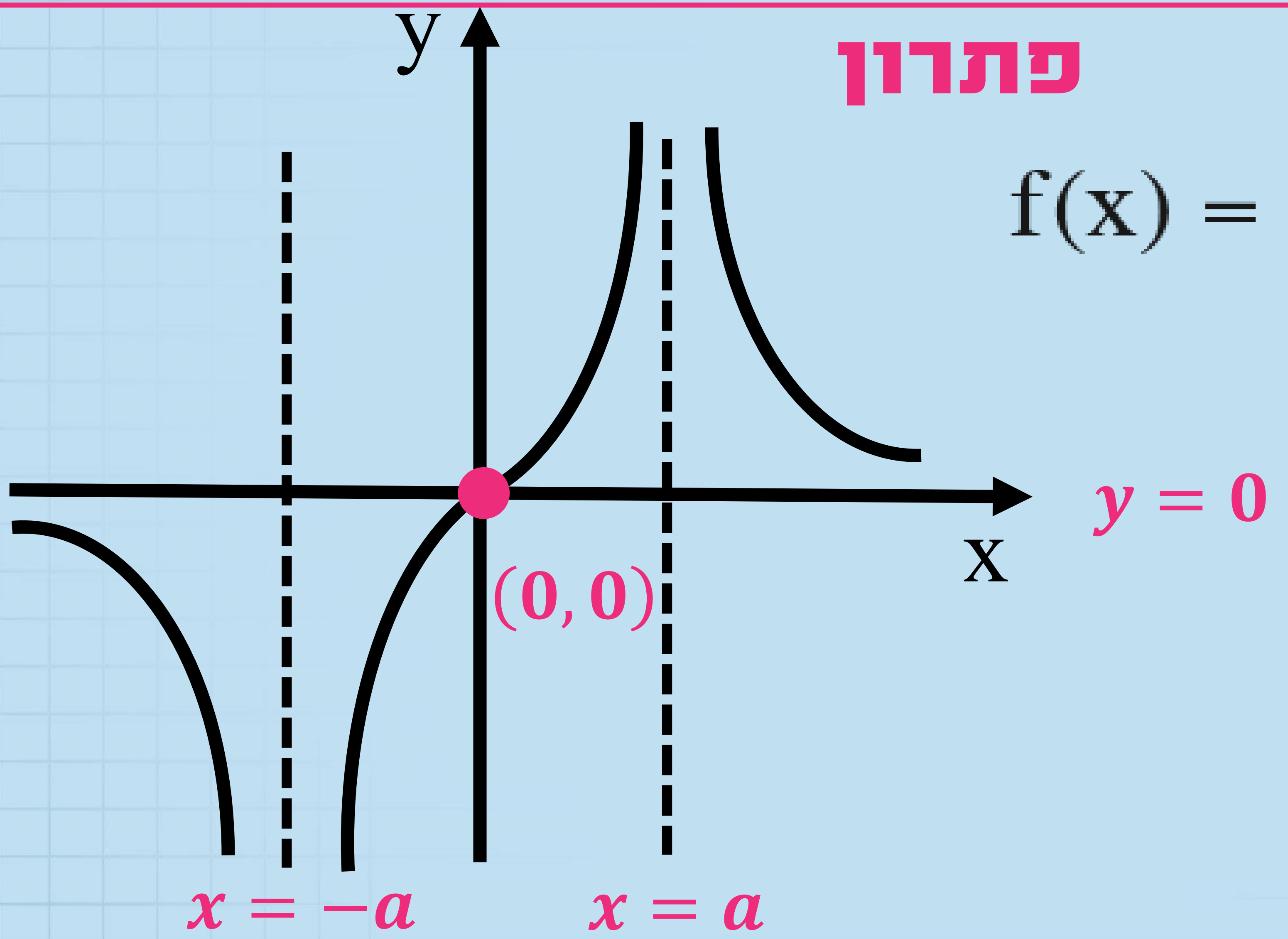


הפונקציה $f(x)$
עולה בתחום $-a < x < a$
ויורדת בתחום $a < x$ או $x < -a$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$. ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

פתרון

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2-a^2)^2}$$



נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$.

ז. מצא את התחום שבו הפונקציה $f(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f'(x)$ שלילית.

פתרון

הפונקציה $f(x)$ שלילית בתחום $-a < x < 0$ או $x < -a$

הפונקציה $f'(x)$ שלילית בתחום $a < x$ או $x < -a$

$\Downarrow$

שתי הפונקציות שליליות בתחום $x < -a$

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a > 0$.

ח. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה-y.

פתרון

$$f'(x) = \frac{-(x^2 - a^2)(3x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^4}$$

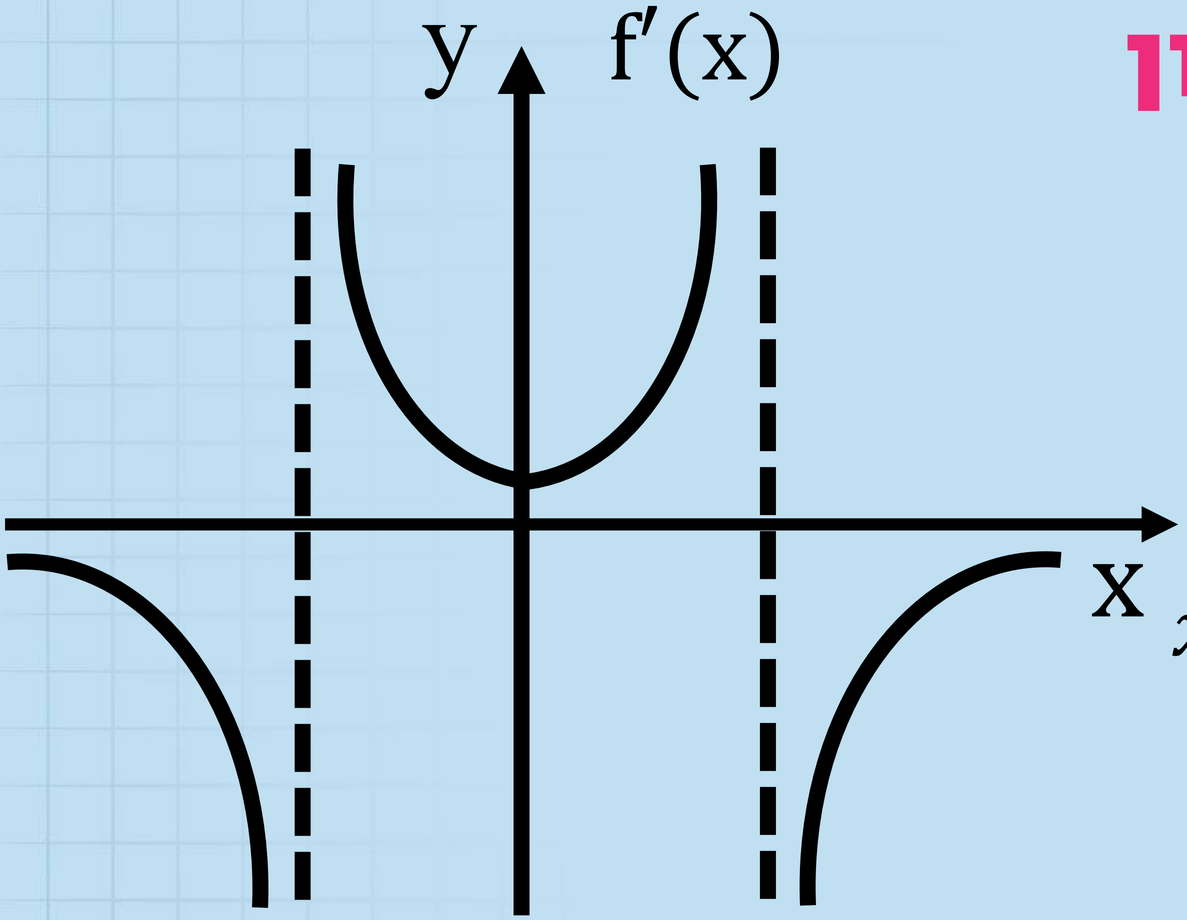
חיתוך עם ציר y , נדרוש $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{-(-a^2)(a^2)}{(-a^2)^4} = \frac{a^4}{a^8} = \frac{1}{a^4}$$

$$\left(0, \frac{1}{a^4}\right)$$

ט. שרטט בצורה כללית, בהסתמך על הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

פתרון



חיתוך עם ציר y , $\left(0,\frac{1}{a^4}\right)$

הנגזרת הראשונה $f'(x)$
אינה חותכת את ציר x
חיובית בתחום $-a < x < a$
ושלילית בתחום $a < x$ או $x < -a$

ל- $f(x)$ נקודות פיתול אחת

$\Downarrow$

ל- $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית אחת

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{(x^2-a^2)^2}$, $a>0$.

י. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ חיובית וגם הפונקציה $f''(x)$ חיובית.

פתרון

$f'(x)$ חיובית בתחום $-a<x<a$

$f''(x)$ חיובית בתחום שבו $f'(x)$ עולה: $a<x$ או $0<x<a$

$$\Downarrow$$

שתי הפונקציות חיוביות בתחום $0<x<a$

בהצלחה