פתרון תרגיל

חקירת פונקציה –
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 87, ת. 42

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

42) לפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x-4} + b$ יש נקודת מינימום בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 18.

א. מצא את b.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:

(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

ז. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < 4$.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(3) ידוע שהפונקציה $g(x)$ חותכת את ציר ה-x בנקודה $x = 3.851$ בקירוב ונקודות הקיצון שלה נמצאות מעל לציר ה-x. שרטט בצורה כללית גרף של הפונקציה $g(x)$.

(4) מעבירים **משיק** לגרף הפונקציה $\mathbf{g(x)}$ בנקודה שבה $x = 3$. מצא את שיעור ה-x של הנקודה שנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והמשיק בה לגרף הפונקציה $g(x)$ **מקביל** למשיק הנ"ל.

42) לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 18. $f(x)=\frac{x^2}{x-4}+b$

א. מצא את b.

פתרון

תחום הגדרה: $x \neq 4$

עבור שיעור ה- x של נקודת המינימום מתקיים:

$f(x)=18$

$f'(x)=0$

וגם

$f''(x)>0$

42) לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 18. $f(x)=\frac{x^2}{x-4}+b$

א. מצא את b.

פתרון

$$f'(x)=0$$

$$f'(x)=\frac{2x(x-4)-x^2\cdot 1}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x}{(x-4)^2}=\frac{x(x-8)}{(x-4)^2}=0$$

$$x=0 \qquad x=8$$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

המכנה של הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי, ולכן
סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

42) לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 18. $f(x)=\frac{x^2}{x-4}+b$

א. מצא את b.

פתרון

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(x^2-8x)'=2x-8$$

עבור $x=0$ נקודת מקסימום $2\cdot 0-8<0$ $x=0$

עבור $x=8$ נקודת מינימום $2\cdot 8-8>0$ $x=8$

42) לפונקציה יש נקודת מינימום בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 18. $f(x)=\frac{x^2}{x-4}+b$

א. מצא את b.

פתרון

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{f(8)=18}$$

$$f(8)=\frac{8^2}{8-4}+b=16+b=18$$

$$\boldsymbol{b=2}$$

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$$

פתרון

עפ"י סעיף א' : עבור $x = 0$ נקודת מקסימום

$(0,2)$ נקודת מקסימום

$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

מתוך הנתון:

$(8,18)$ נקודת מינימום

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים. $f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$

פתרון

חיתוך עם ציר y , נדרוש $x = 0$:

$$f(0) = 2$$

$(0, 2)$

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$\frac{x^2}{x-4} + 2 = \frac{x^2 + 2x - 8}{x-4} = \frac{(x+4)(x-2)}{x-4}$$

$(-4, 0)$

$(2, 0)$

$$x = -4 \qquad x = 2$$

ד. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה. $f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$

פתרון

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 4}$$

הערך $x = 4$ מאפס את המכנה ולא את המונה:

$$4^2 + 2 \cdot 4 - 8 = 16$$

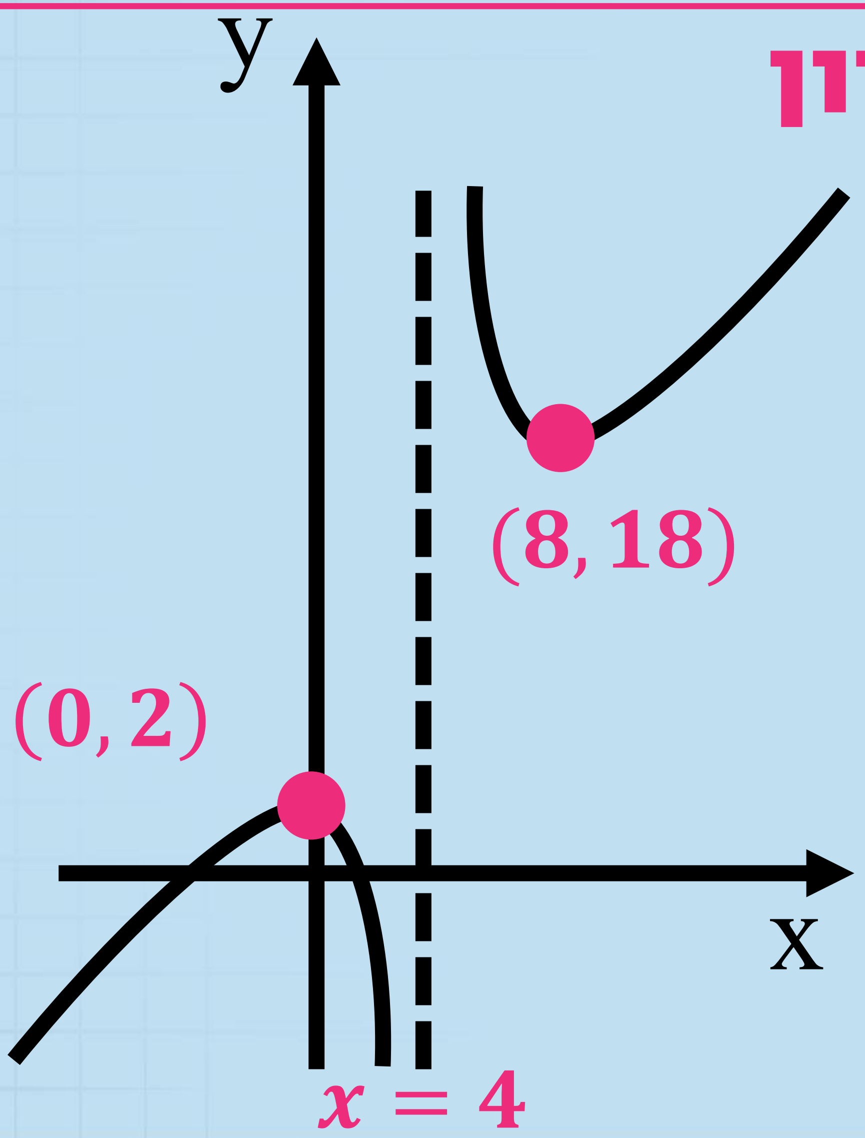
$$\Downarrow$$

הישר $x = 4$ הוא אסימפטוטה מאונכת לציר x של הפונקציה

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$$

פתרון

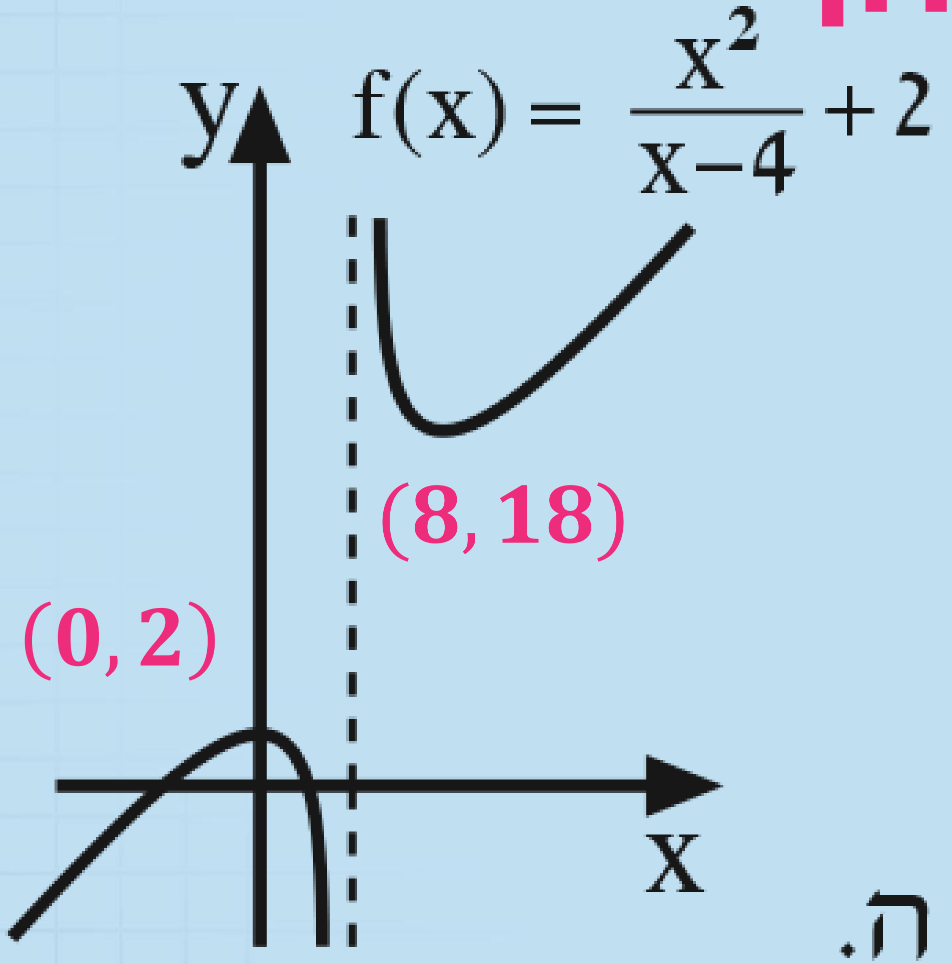


$$f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$$

ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$

(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון



ה.

נפתור את השאלה גרפית,
עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$

חיתוך בנקודה אחת יתקבל רק
בשיעור ה- y של נקודות הקיצון

(1) הישר $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת עבור
$k = 2{,}18$

ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$

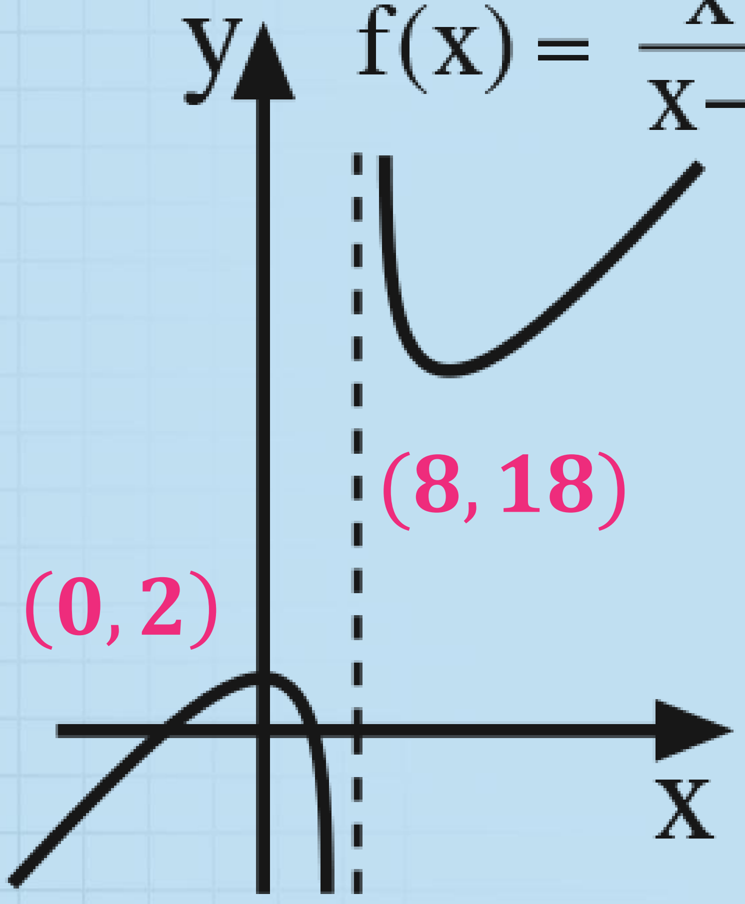
(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון

נפתור את השאלה גרפית,

עפ״י גרף הפונקציה $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$$



(2) הישר $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות עבור

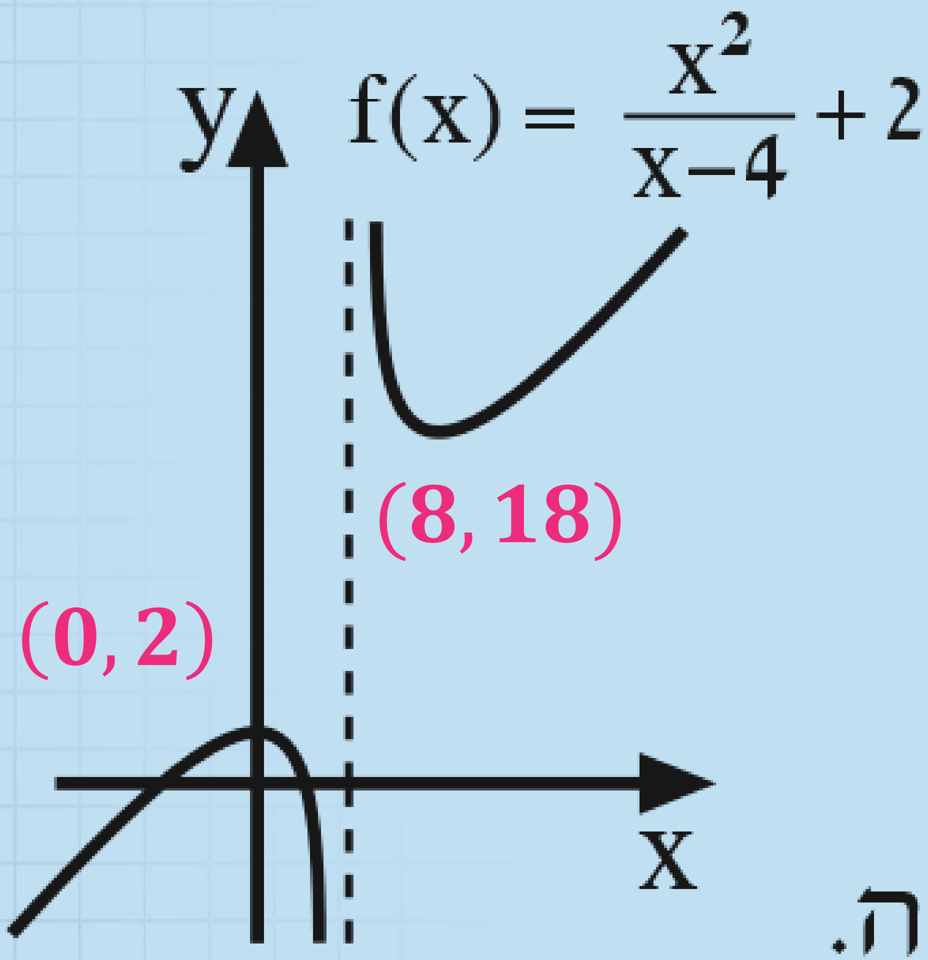
$k > 18$ או $k < 2$

ה.

ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$

(1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

פתרון



נפתור את השאלה גרפית,

עפ״י גרף הפונקציה $f(x)$

(3) הישר $y = k$ לא יחתוך את גרף הפונקציה עבור $2 < k < 18$

ז. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < 4$.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

נדרוש: $g'(x) = f(x) = 0$

עפ"י סעיף ג': $f(x) = 0$

$x = -4 \qquad x = 2$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה

$g''(x) = f'(x)$

ז. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < 4$.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2}$$

$x = -4$ $$f'(-4) = \frac{(-4)^2 - 8 \cdot (-4)}{(-4-4)^2} > 0$$

עבור $x = -4$ נקודת מינימום

ז. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < 4$.

(1) מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2}$$

$$x = 2 \qquad f'(2) = \frac{(2)^2 - 8 \cdot 2}{(2-4)^2} < 0$$

עבור $x = 2$ נקודת מקסימום

ז. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < 4$.

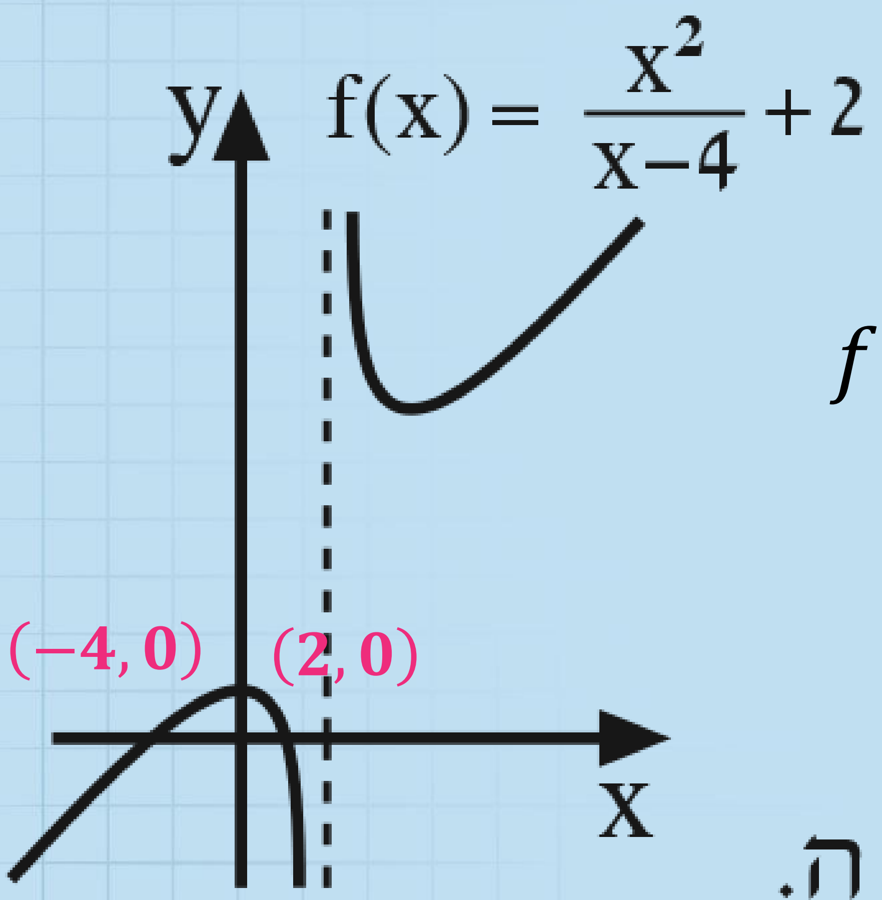
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

תחומי עלייה וירידה יקבעו עפ"י סימן הנגזרת הראשונה

$$g'(x) = f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$$

נפתור את השאלה גרפית, עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$



הנגזרת הראשונה $f(x)$

חיובית בתחום $-4 < x < 2$

ושלילית בתחום $2 < x < 4$ או $x < -4$

ז. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < 4$.

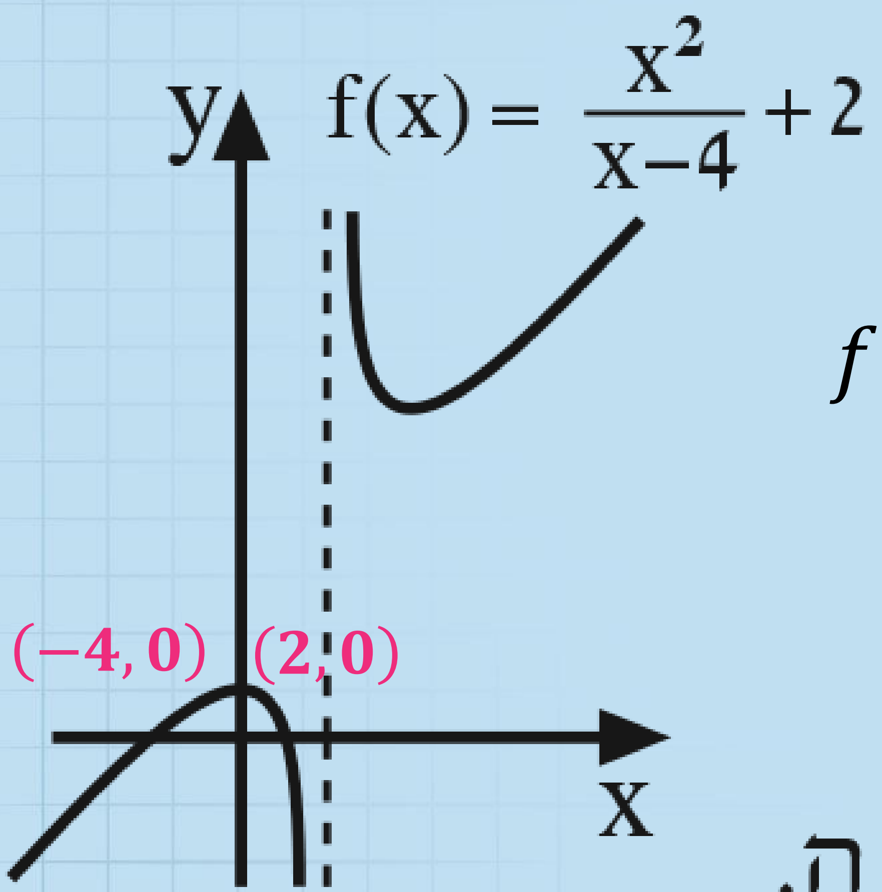
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

פתרון

תחומי עלייה וירידה יקבעו עפ"י **סימן** הנגזרת הראשונה

$$g'(x) = f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2$$

נפתור את השאלה גרפית, עפ"י גרף הפונקציה $f(x)$



ה.

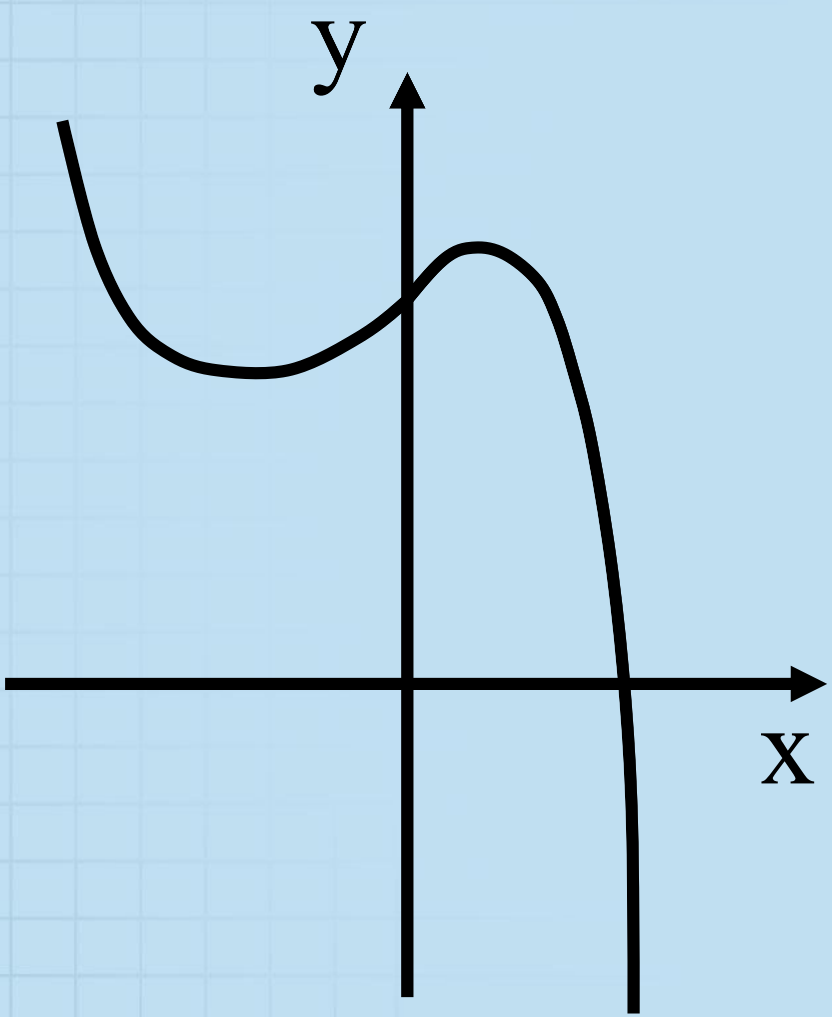
הפונקציה $g(x)$

עולה בתחום $-4 < x < 2$

ויורדת בתחום $2 < x < 4$ או $x < -4$

(3) ידוע שהפונקציה $g(x)$ חותכת את ציר ה-x בנקודה $x = 3.851$ בקירוב ונקודות הקיצון שלה נמצאות מעל לציר ה-x. שרטט בצורה כללית גרף של הפונקציה $g(x)$.

פתרון



עבור $x = -4$ נקודת **מינימום**

עבור $x = 2$ נקודת **מקסימום**

הפונקציה $g(x)$
עולה בתחום $-4 < x < 2$
יורדת בתחום $4 > x > 2$ או $x < -4$

(4) מעבירים **משיק** לגרף הפונקציה $\mathbf{g(x)}$ בנקודה שבה $x = 3$. מצא את שיעור ה-x של הנקודה שנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והמשיק בה לגרף הפונקציה $g(x)$ **מקביל** למשיק הנ"ל.

פתרון

ישרים מקבילים – משמע, בעלי אותו שיפוע

שיפוע משיק שווה לערך הנגזרת בנקודה

$$\Downarrow$$

קיים ערך x **נוסף** המקיים $g'(x) = g'(3)$

$$g'(3) = f(3) = \frac{3^2}{3-4} + 2 = -7$$

(4) מעבירים **משיק** לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 3$. מצא את שיעור ה-x של הנקודה שנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והמשיק בה לגרף הפונקציה $g(x)$ **מקביל** למשיק הנ"ל.

פתרון

נחפש ערך x **נוסף** המקיים $g'(x) = -7$

$$g'(x) = f(x) = \frac{x^2}{x-4} + 2 = -7$$

$$\frac{x^2}{x-4} = -9$$

$$x^2 = -9x + 36$$

(4) מעבירים **משיק** לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 3$. מצא את שיעור ה-x של הנקודה שנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והמשיק בה לגרף הפונקציה $g(x)$ **מקביל** למשיק הנ"ל.

פתרון

נחפש ערך x **נוסף** המקיים $g'(x) = -7$

$$x^2 = -9x + 36$$

$$x^2 + 9x - 36 = 0$$

$$(x + 12)(x - 3) = 0$$

$$\boldsymbol{x = -12} \qquad x = 3$$

בהצלחה