פתרון תרגיל

חקירת פונקציה –
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 86, ת. 26

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

חקירת פונקציות בתרגילים שלהלן תיעשה עפ"י הסעיפים הבאים והיא כוללת מציאת:

א) תחום הגדרה.
ב) נקודות קיצון.
ג) תחומי עלייה וירידה.
ד) נקודות חיתוך עם הצירים.
ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.
ו) שרטוט גרף הפונקציה.

26) $$y=\frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$$

א) תחום הגדרה. (26 $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

תחום הגדרה:

$$9 - x^2 \neq 0$$

$$x \neq \pm 3$$

ב) נקודות קיצון. $y=\frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$ (26

פתרון

נדרוש: $y'(x)=0$

$$y'(x)=\frac{(3x^2-6x)(9-x^2)-(x^3-3x^2)(-2x)}{(9-x^2)^2}=$$

$$=\frac{3x(x-2)(3-x)(3+x)+2x\cdot x^2(x-3)}{(9-x^2)^2}=$$

$$=\frac{3x(x-2)(3-x)(3+x)-2x^3\mathbf{(3-x)}}{(9-x^2)^2}=$$

ב) נקודות קיצון. $\quad$ 26) $y = \dfrac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

נדרוש: $y'(x) = 0$

$$y'(x) = \frac{3x(x-2)(3-x)(3+x) - 2x^3(3-x)}{(9-x^2)^2} =$$

$$= \frac{x(3-x)[3(x-2)(3+x) - 2x^2]}{(9-x^2)^2}$$

$$= \frac{x(3-x)(9x + 3x^2 - 18 - 6x - 2x^2)}{(9-x^2)^2}$$

ב) נקודות קיצון. $\quad$ 26) $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

נדרוש: $y'(x) = 0$

$$y'(x) = \frac{x(3-x)(9x+3x^2-18-6x-2x^2)}{(9-x^2)^2} =$$

$$= \frac{x(3-x)(x^2+3x-18)}{(9-x^2)^2} = \frac{x(3-x)(x+6)(x-3)}{(9-x^2)^2}$$

$$= \frac{-x(3-x)^2(x+6)}{(9-x^2)^2} = 0$$

ב) נקודות קיצון.

26) $y=\frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

נדרוש: $y'(x)=0$

$$-x(3-x)^2(x+6)=0 \qquad /\div (3-x)^2\neq 0$$

$$-x(x+6)=0$$

$$x=0 \qquad\qquad x=-6$$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי, ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הנגזרת של המונה:

ב) נקודות קיצון.

26) $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(-x(3-x)^2(x+6))' = (-x(9-6x+x^2)(x+6))'$$

$$= (-9x^2+6x^3-x^4-54x+12x^2-6x^3)'$$

$$= (-x^4+3x^2-54x)' = -4x^3+6x-54$$

ב) נקודות קיצון. (26 $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$-4x^3 + 6x - 54$$

$x = 0$ $\quad 0 - 54 < 0$ $\quad$ עבור $x = 0$ נקודת מקסימום

$x = -6$ $\quad -4 \cdot (-6)^3 + 6 \cdot (-6) - 54 > 0$

עבור $x = -6$ נקודת מינימום

ב) נקודות קיצון. (26 $y=\frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

נמצא את שיעור ה- y של נקודות הקיצון ע"י הצבה בפונקציה:

$$f(0)=\frac{0}{9}=0$$

$(0,0)$ נקודת מקסימום

$$f(-6)=\frac{(-6)^3-3\cdot(-6)^2}{9-(-6)^2}=\frac{-324}{-27}=12$$

$(-6,12)$ נקודת מינימום

ג) תחומי עלייה וירידה.

26) $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

תחומי עלייה וירידה יקבעו עפ״י סימן הנגזרת הראשונה

$$y'(x) = \frac{-x(3-x)^2(x+6)}{(9-x^2)^2}$$

המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי לכל x מוגדר

הביטוי $(3-x)^2$ חיובי לכל x מוגדר

ולכן סימן הנגזרת הראשונה יקבע עפ״י הביטוי $\boldsymbol{-x(x+6)}$

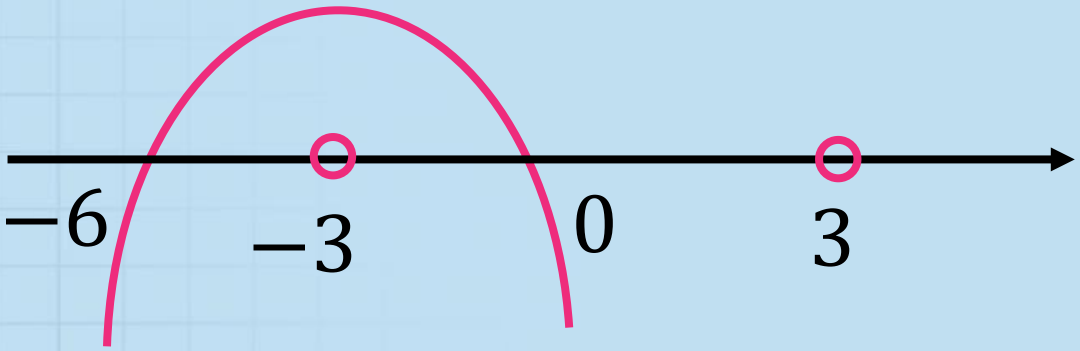
הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x=-6,0$

26) $y = \frac{x^3 - 3x^2}{9 - x^2}$ ג) **תחומי עלייה וירידה.**

פתרון

הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = -6,0$

נתייחס ל**תחום ההגדרה** של הפונקציה $x \neq \pm 3$



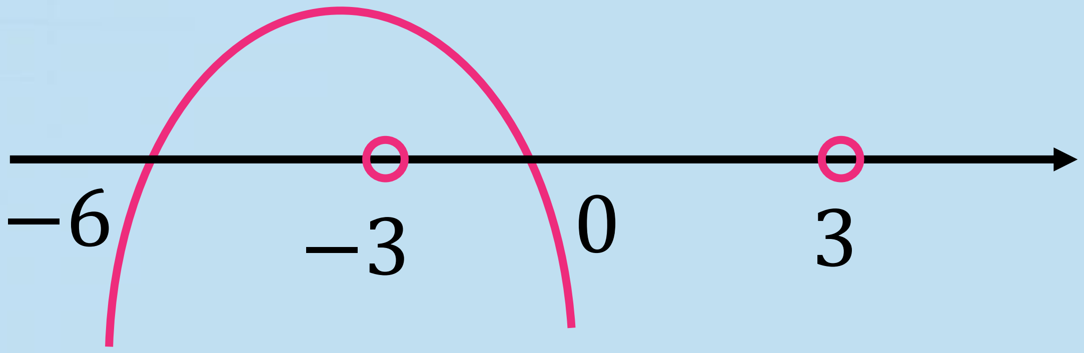
הנגזרת הראשונה $y'(x)$

חיובית בתחום $-3 < x < 0$ או $-6 < x < -3$

ושלילית בתחום $3 < x$ או $0 < x < 3$ או $x < -6$

ג) תחומי עלייה וירידה.   26) $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון



הפונקציה $y(x)$

עולה בתחום $-3 < x < 0$ או $-6 < x < -3$

ויורדת בתחום $3 < x$ או $0 < x < 3$ או $x < -6$

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

26) $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

חיתוך עם ציר y, נדרוש $x = 0$:

$$y(0) = 0$$

$(0, 0)$

חיתוך עם ציר x, נדרוש $y = 0$:

$$\frac{x^3 - 3x^2}{9 - x^2} = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

26) $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$x^2(x-3) = 0$$

$$x = 0 \qquad \cancel{x = 3}$$

$$x \neq 3$$

$(0,0)$

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

26) $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

אסימפטוטה המאונכת לציר x

הערך $x = 3$ מאפס את המכנה וגם את המונה: $3^3 - 3 \cdot 3^2 = 0$

להמשך הבדיקה - נצמצם את הפונקציה אלגברית:

$$y = \frac{x^2(x-3)}{(3-x)(3+x)} = \frac{-x^2}{(3+x)}$$

הערך $x = 3$ **אינו** מאפס את המכנה בצורתו המצומצמת,
ולכן לפונקציה יש "חור" , נקודת אי הגדרה, עבור ערך זה

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים. 26) $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון

אסימפטוטה המאונכת לציר x

הערך $x = -3$ מאפס את המכנה ולא את המונה:

$$(-3)^3-3\cdot(-3)^2 = -54$$

$$\Downarrow$$

הישר $x = -3$ הוא אסימפטוטה מאונכת לציר x של הפונקציה

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים. $y = \frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$ (26

פתרון

אסימפטוטה אופקית

החזקה המובילה , x^3 , במונה

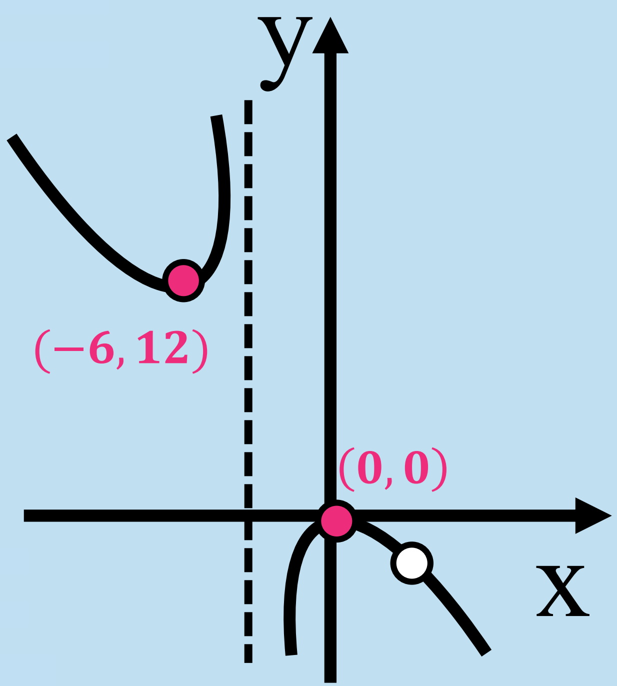
$\Downarrow$

לפונקציה אין אסימפטוטה המקבילה לציר x

ו) שרטוט גרף הפונקציה.

26) $y=\frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$

פתרון



$$y=\frac{x^3-3x^2}{9-x^2}$$

בהצלחה