פתרון תרגיל

חקירת פונקציה –
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 86, ת. 18

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

השאלה

חקירת פונקציות בתרגילים שלהלן תיעשה עפ"י הסעיפים הבאים והיא כוללת מציאת:

א) תחום הגדרה.

ב) נקודות קיצון.

ג) תחומי עלייה וירידה.

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

ו) שרטוט גרף הפונקציה.

18) $$y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$$

א) תחום הגדרה. 18) $y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

תחום הגדרה:

$$x^2 - 2x \neq 0$$

$$x(x-2) \neq 0$$

$$x \neq 0 \qquad x \neq 2$$

ב) נקודות קיצון.   18) $y=\frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

נדרוש: $y'(x)=0$

$$y'(x)=\frac{4(x^2-2x)-(4x+1)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=$$

$$=\frac{4x^2-8x-8x^2+8x-2x+2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-4x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}=0$$

ב) נקודות קיצון.   18) $y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

נדרוש: $y'(x) = 0$

$$-4x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x = -1 \qquad x = \frac{1}{2}$$

נאבחן את הנקודות החשודות באמצעות סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$

הנגזרת הראשונה היא פונקציית מנה שבה המכנה תמיד חיובי, ולכן סימן הנגזרת השנייה יקבע ע״י הנגזרת של המונה:

ב) נקודות קיצון. $\quad$ 18) $y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

סימן הנגזרת השנייה יקבע ע"י הנגזרת של המונה:

$$(-4x^2 - 2x + 2)' = -8x - 2$$

$x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $-8 \cdot \frac{1}{2} - 2 < 0$ $\quad$ עבור $x = \frac{1}{2}$ נקודת מקסימום

$x = -1$ $\quad$ $-8 \cdot (-1) - 2 > 0$ $\quad$ עבור $x = -1$ נקודת מינימום

ב) נקודות קיצון.   18) $y=\frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

נמצא את שיעור ה- y של נקודות הקיצון ע״י הצבה בפונקציה:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\cdot\frac{1}{2}+1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{-\frac{3}{4}}=-4$$

נקודת מקסימום $\left(\frac{1}{2},-4\right)$

$$f(-1)=\frac{4\cdot(-1)+1}{(-1)^2-2\cdot(-1)}=\frac{-3}{3}=-1$$

נקודת מינימום $(-1,-1)$

ג) תחומי עלייה וירידה. (18 $y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

תחומי עלייה וירידה יקבעו עפ״י סימן הנגזרת הראשונה

$$y'(x) = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

המכנה של הנגזרת הראשונה חיובי לכל x מוגדר
ולכן סימן הנגזרת הראשונה יקבע עפ״י המונה בלבד

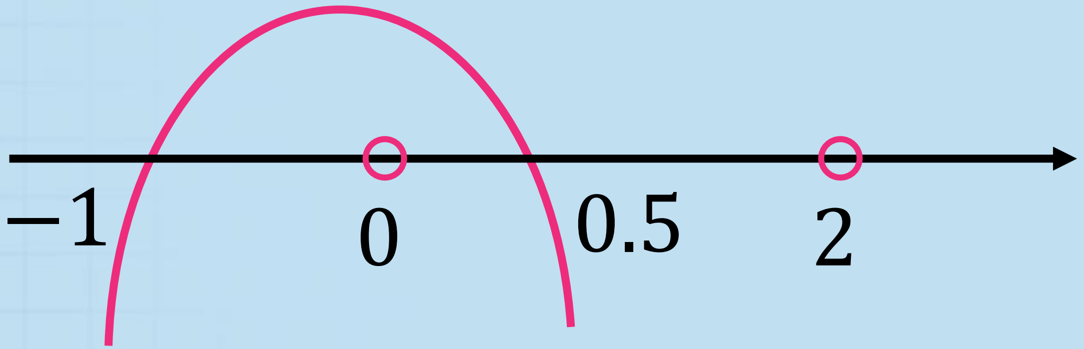
הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = -1, \frac{1}{2}$

ג) תחומי עלייה וירידה.   18) $y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = -1, \frac{1}{2}$

נתייחס ל**תחום ההגדרה** של הפונקציה $x \neq 0,2$



הנגזרת הראשונה $y'(x)$

חיובית בתחום $0 < x < 0.5$ או $-1 < x < 0$

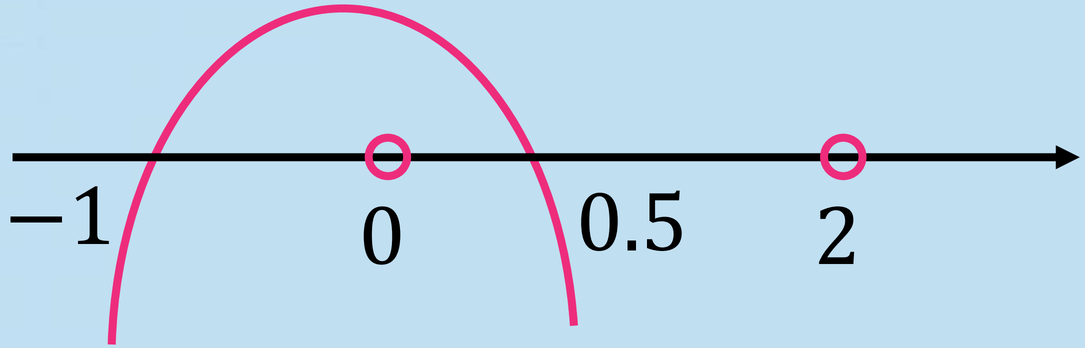
ושלילית בתחום $x > 2$ או $0.5 < x < 2$ או $x < -1$

ג) תחומי עלייה וירידה.

18) $y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

$y'(x)$



הפונקציה $y(x)$

עולה בתחום $0 < x < 0.5$ או $-1 < x < 0$

יורדת בתחום $x > 2$ או $0.5 < x < 2$ או $x < -1$

ד) נקודות חיתוך עם הצירים. $\quad$ 18) $y=\frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

חיתוך עם ציר y , נדרש $x=0$:

הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$ - **אין חיתוך עם ציר y**

חיתוך עם ציר x , נדרש $y=0$:

$$\frac{4x+1}{x^2-2x}=0$$

$$x=-\frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{1}{4},0\right)$$

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים. 18) $y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

אסימפטוטה המאונכת לציר x

הערך $x = 0$ מאפס את המכנה ולא את המונה: $0 + 1 = 1$

הערך $x = 2$ מאפס את המכנה ולא את המונה: $4 \cdot 2 + 1 = 9$

$$\Downarrow$$

הישרים $x = 0$ ו- $x = 2$ הם אסימפטוטות מאונכות לציר x של הפונקציה

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים. 18) $y = \frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

אסימפטוטה אופקית

החזקה המובילה , x^2 , במכנה

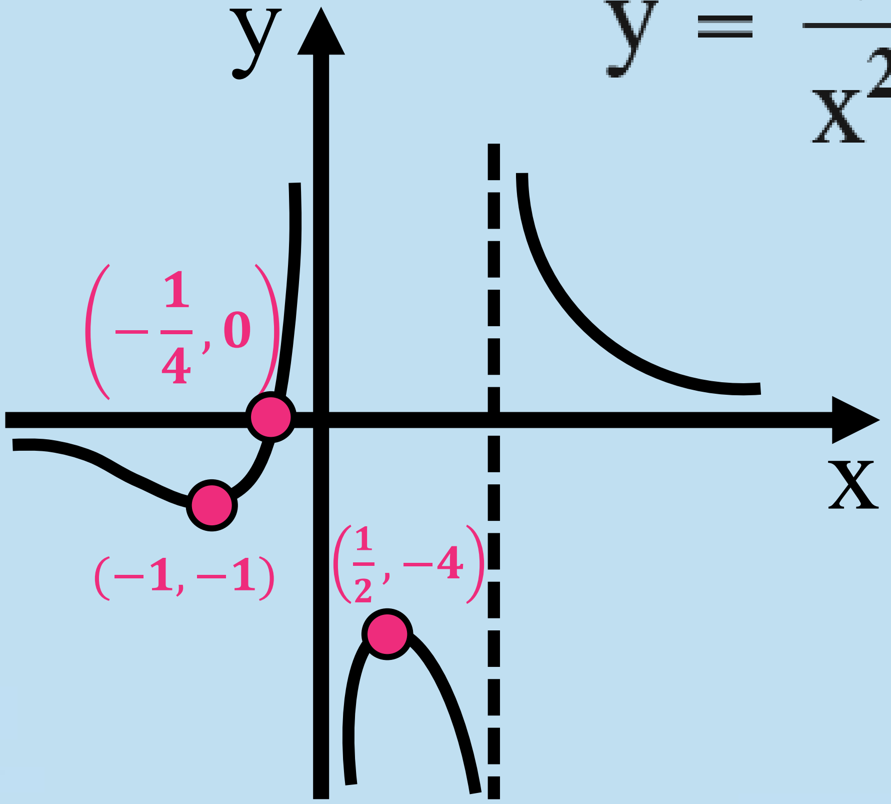
$$\Downarrow$$

הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה מקבילה לציר x של הפונקציה

ו) שרטוט גרף הפונקציה. 18) $y=\frac{4x+1}{x^2-2x}$

פתרון

$$y=\frac{4x+1}{x^2-2x}$$



בהצלחה