תרגיל לדוגמה

חקירת פונקציה –
פונקציות רציונאליות

מתמטיקה (5 יח"ל) חלק ב'–2

581 , עמ' 81–83, דוגמה ב'

המצגת נערכה ע"י שירי דוברין

תרגיל לדוגמה

דוגמא ב':

(1) חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$

חקירת פונקציות בתרגילים שלהלן תיעשה עפ"י הסעיפים הבאים והיא כוללת מציאת:

א) תחום הגדרה.

ב) נקודות קיצון.

ג) תחומי עלייה וירידה.

ד) נקודות חיתוך עם הצירים.

ה) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

ו) שרטוט גרף הפונקציה.

(2) שרטט את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$ ומצא את התחום שבו הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ היא חיובית וגם פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ היא חיובית אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

(1) א. **תחום הגדרה** – כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה נשווה את המכנה לאפס. נקבל $x^2-4x+3 = 0$. פתרונות המשוואה הריבועית הם: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
לכן תחום ההגדרה הוא $x \neq 1$, $x \neq 3$.

ב. **נקודות קיצון** – נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4x+3) - x^2(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{2x^3-8x^2+6x-2x^3+4x^2}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2} = 0.$$

תרגיל לדוגמה

ב. נקודות קיצון

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$-4x^2+6x = 0$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$.

כדי לקבוע את סוג נקודות הקיצון מספיק לגזור את **המונה** של הנגזרת הראשונה,

תרגיל לדוגמה

ב. נקודות קיצון

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

$$(-4x^2+6x)' = -8x+6$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

$x = 0$ $\quad -8\cdot 0+6>0$

לכן $(0,0)$ היא נקודת מינימום

$x = 1.5$ $\quad -8\cdot 1.5+6<0$

$(1.5,-3)$ היא נקודת מקסימום.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

ג. **תחומי עלייה וירידה** – המכנה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ולכן נשאר לבדוק מתי המונה של הנגזרת הראשונה הוא חיובי ומתי הוא שלילי.

הביטוי מתאר פרבולה הפוכה החותכת את ציר ה- x בנקודות $x = 0\ ,1.5$

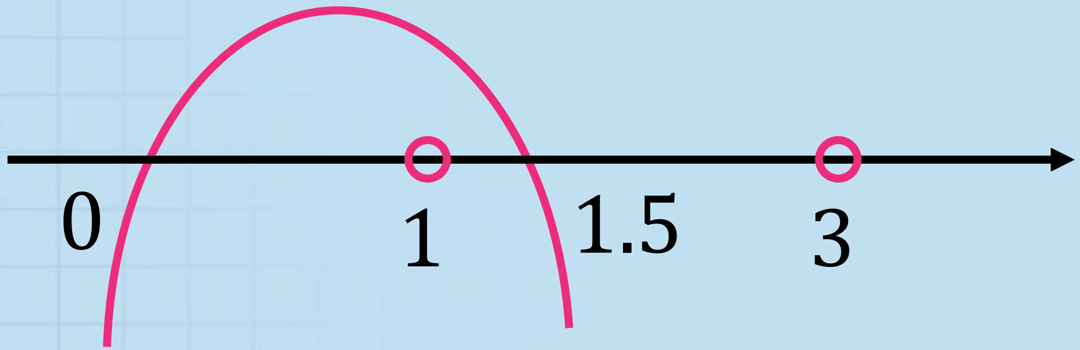
תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

ג. **תחומי עלייה וירידה**

נתייחס ל**תחום ההגדרה** של הפונקציה $x \neq 1,3$



הנגזרת הראשונה $f'(x)$
חיובית בתחום $1 < x < 1.5$ או $0 < x < 1$
ושלילית בתחום $x > 3$ או $1.5 < x < 3$ או $x < 0$

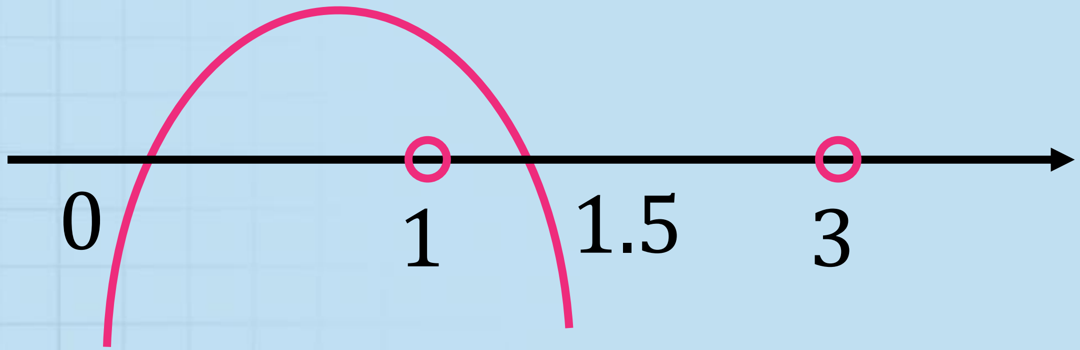
תרגיל לדוגמה

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

$$f'(x)=\frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

ג. **תחומי עלייה וירידה**

נתייחס ל**תחום ההגדרה** של הפונקציה $x \neq 1,3$



הפונקציה $f(x)$

עולה בתחום $1<x<1.5$ או $0<x<1$

ויורדת בתחום $x>3$ או $1.5<x<3$ או $x<0$

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

ד. נקודות חיתוך עם הצירים

חיתוך עם ציר y , נדרוש $x = 0$:

$$f(0) = \frac{0}{0+3} = 0$$

$(0,0)$.

חיתוך עם ציר x , נדרוש $y = 0$:

$$\frac{x^2}{x^2-4x+3} = 0$$

$$x = 0$$

$(0,0)$.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

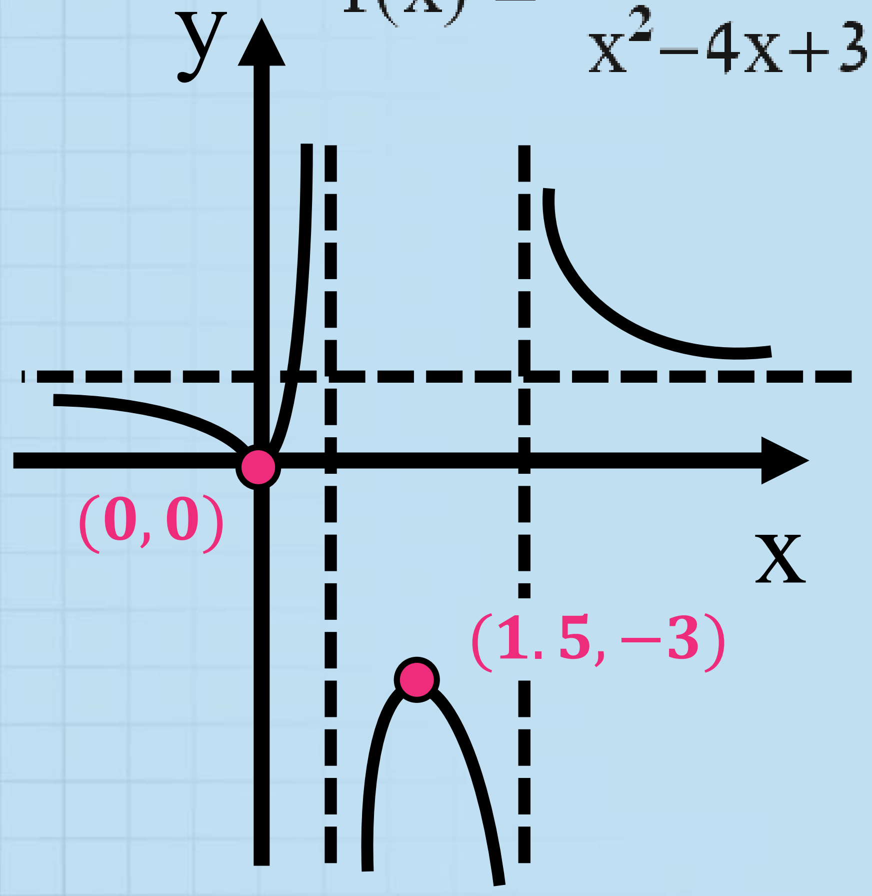
ה. **אסימפטוטות אנכיות** – המכנה שווה ל-0 עבור $x = 1$ ו-$x = 3$. קל לראות שהמונה לא מתאפס בנקודות אלה ולכן אסימפטוטות המאונכות לציר ה-x הן $x = 1$ ו-$x = 3$.

אסימפטוטה אופקית – החזקה הגבוהה ביותר במונה היא x^2 והמקדם הוא 1. גם החזקה הגבוהה ביותר במכנה היא x^2 וגם כאן המקדם הוא 1. לכן אסימפטוטה אופקית היא $y = \frac{1}{1} = 1$.

לסיכום – האסימפטוטות המאונכות לצירים הן: $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$.

תרגיל לדוגמה

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4x+3}$$



ו. **התיאור הגרפי** – את התוצאות שקיבלנו ניתן לסכם בטבלה.

x	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<1.5$	1.5	$1.5<x<3$	3	$x>3$
$f'(x)$	−	0	+		+	0	−		−
עלייה ירידה	↘	מינימום	↗		↗	מקסימום	↘		↘

תרגיל לדוגמה

(2) שרטט את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$ ומצא את התחום שבו הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ היא חיובית וגם פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ היא חיובית אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

(2) עפ"י הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ שבפתרון של סעיף ב' קל לראות שהאסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ הן $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$. כמו כן,

תרגיל לדוגמה

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

הנגזרת הראשונה $f'(x)$
חיובית בתחום $1 < x < 1.5$ או $0 < x < 1$
ושלילית בתחום $x > 3$ או $1.5 < x < 3$ או $x < 0$

ל- $f(x)$ נקודות קיצון עבור $x = 0,1.5$

$$\Downarrow$$

$$f'(0) = f'(1.5) = 0$$

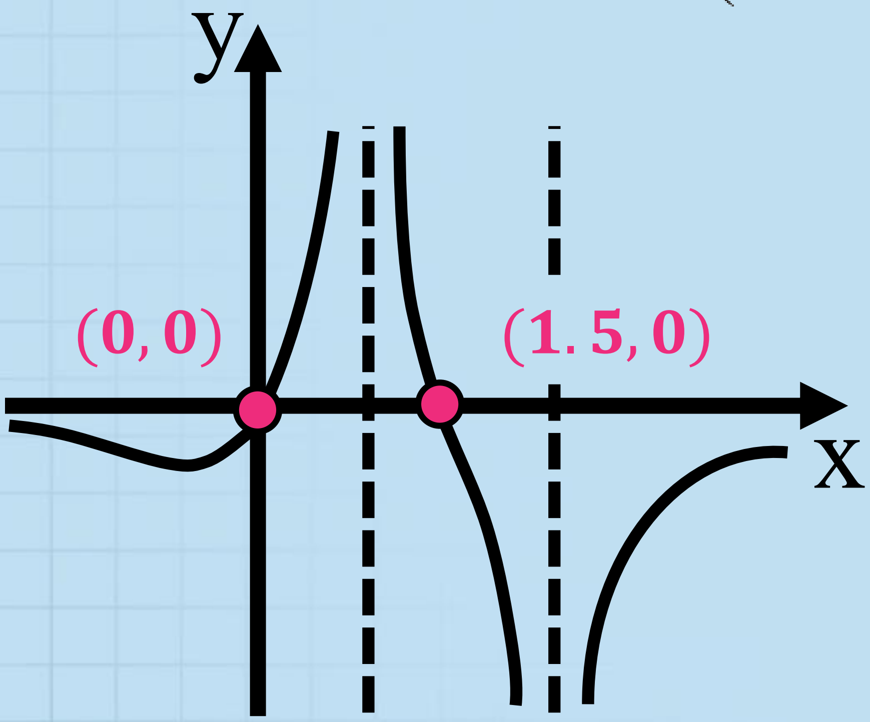
תרגיל לדוגמה

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$

ל- $f(x)$ נקודות פיתול אחת

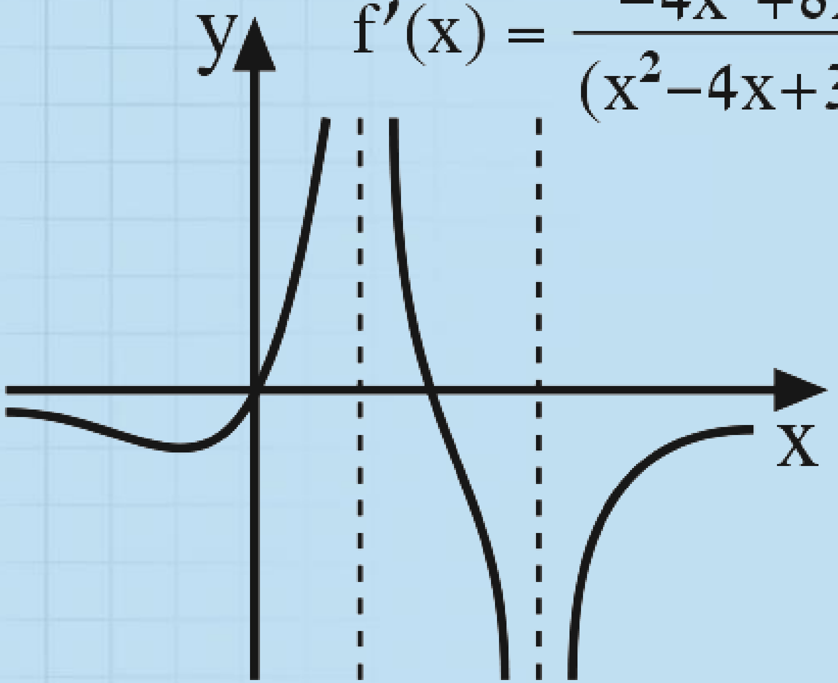
$\Downarrow$

ל- $f'(x)$ נקודת קיצון פנימית אחת



תרגיל לדוגמה

$$f'(x) = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2}$$



נמצא עכשיו את התחום שבו

הפונקציה $f''(x)$ חיובית, תחום זה הוא התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ עולה. אם נסמן ב-x_1 את שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $f'(x)$ נקבל שהפונקציה $f''(x)$ חיובית בתחום $x_1 < x < 1$ או $x > 3$. ע"י התבוננות בכל התחומים שהתקבלו נוכל לסכם: הפונקציות $f'(x)$ ו-$f''(x)$ חיוביות בתחום $0 < x < 1$.

בהצלחה